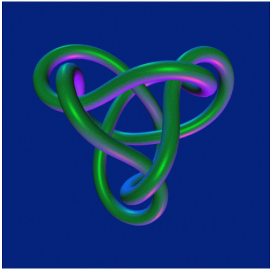
Clasificación de Nudos I

Escuela FICO-González Acuña de nudos y 3 variedades

Luis Celso Chan Palomo
Universidad Autónoma de Yucatán

December 11, 2017

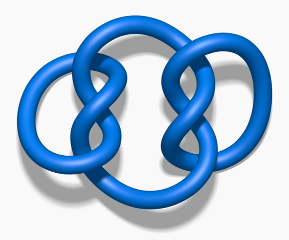
Plan

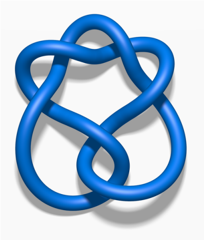


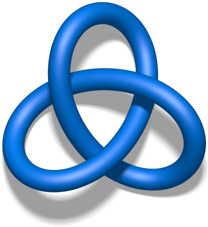
1. Nudos
2. Equivalencia de Nudos.
3. Clasificación.
4. Orígenes.
5. Primicidad.

Definición

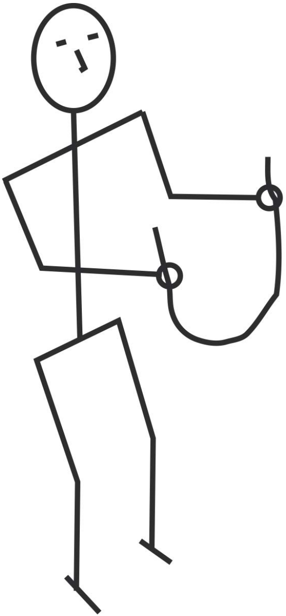
Un *nudo* *es una curva simple cerrada en el espacio* $\mathbb{R}^3$.

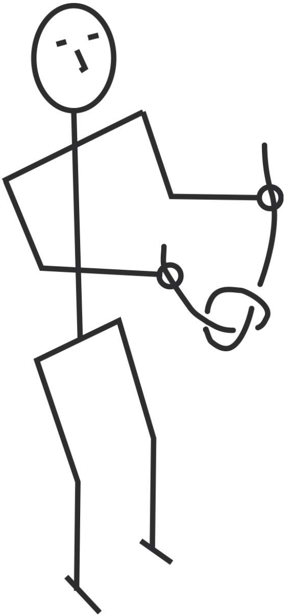






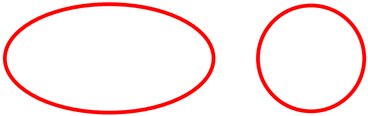
Construcción de nudos





Nota

1. *No nos interesará la longitud de la curva ni su grosor.*
2. *Se podrá asumir que la curva es elástica por lo que podrá estirarse o encogerse sin romper o cortar la curva, solo manipularla con las manos en el espacio.*



Definición

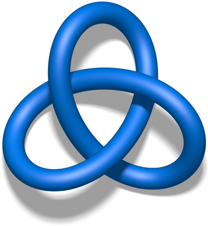
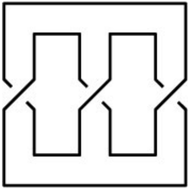
El nudo trivial:

Equivalencia de nudos

Definición

Dos nudos K_1 y K_2 en $\mathbb{R}^3$ se denominan equivalentes si es posible deformar K_1 en K_2 sin romperlo.

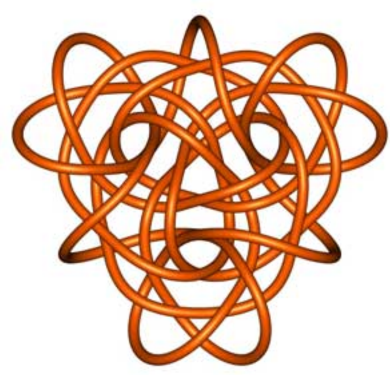
Ejemplo

Problema de Anudamiento

Ejemplo (Problema Básico)

El siguiente nudo es equivalente al trivial, es decir, está anudado?



Pregunta

Que parejas de nudos son *equivalentes*?

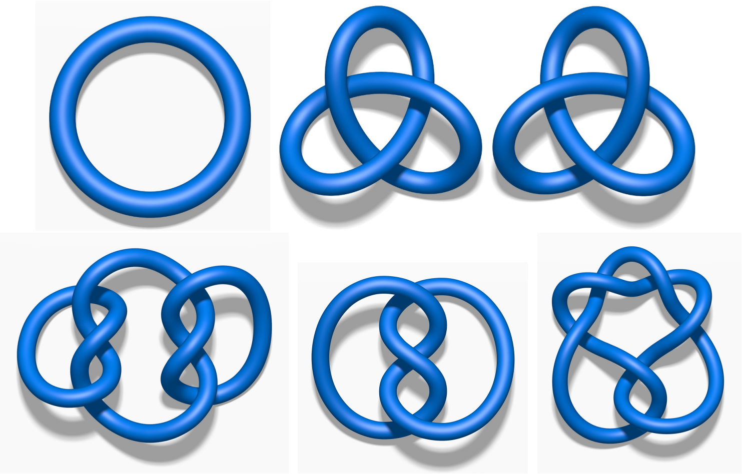
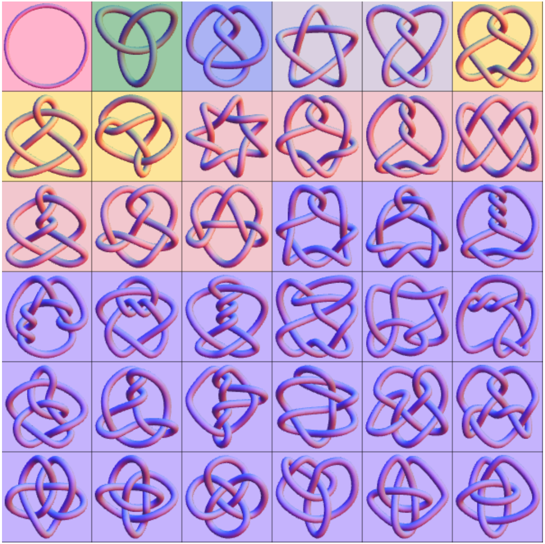


Tabla de clasificación

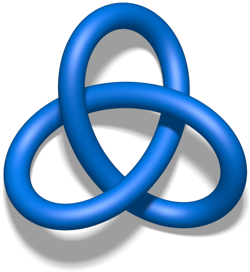


Cómo se obtuvo? Cuántos nudos hay?

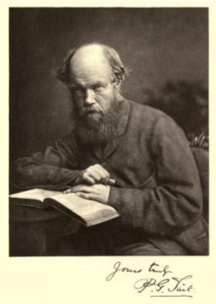
Orígenes: Química

Kelvin (1867): modelo atómico de Kelvin
En esa época se pensaba que el universo estaba hecho de una materia llamada eter y Kelvin sospechaba que los diferentes tipo de materia se correspondian con vórtices tubulares anudados en el eter.

Helio?

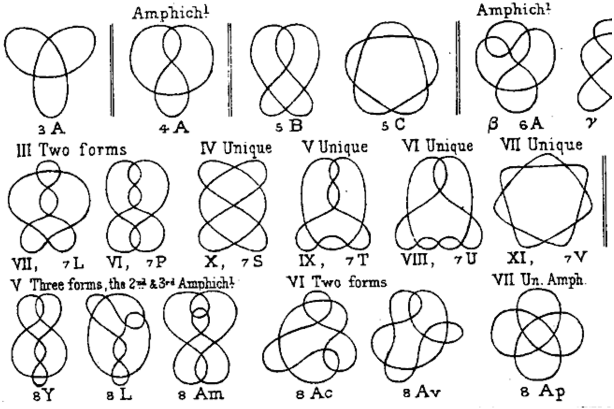


El modelo de Kelvin inspiro a Tait (físico escocés) a iniciar el estudio de la clasificación de los nudos con el fin de facilitar la tarea de decidir cuándo dos átomos eran diferentes.



En 1877 publica los primeros artículos respecto de la clasificación de nudos. Sin embargo, algunas cosas carecían de rigor matemático.

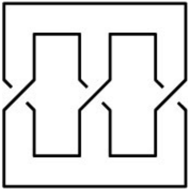
Tabla de Tait



A finales de 1900 los científicos descubrieron que el éter invisible del espacio no existía y los químicos perdieron el interés en los nudos.

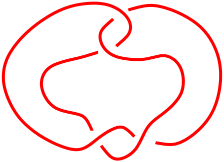
Diagramas mínimos de cruces

Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, es decir, la proyección sobre el plano XY.

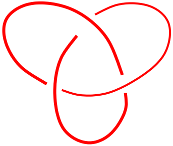


Ejemplo

Los siguientes nudos son equivalentes o iguales:



4 cruces



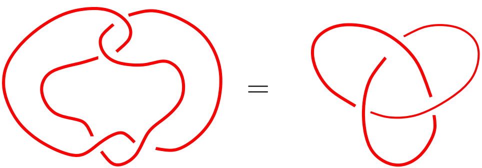
3 cruces

Nudos alternantes

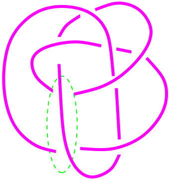
Definición

Un nudo se denomina alternante si tiene un diagrama alternante, es decir, uno donde los cruces por abajo y arriba alternan al recorrer el nudo. En caso contrario, se denomina no-alternante, es decir, si no tiene ningún diagrama alternante.

Ejemplo



Alternante



No alternante

Problema

Cómo demostrar que el nudo anterior no es alternante?

Tait: Nudos primos hasta 7 cruces-1876

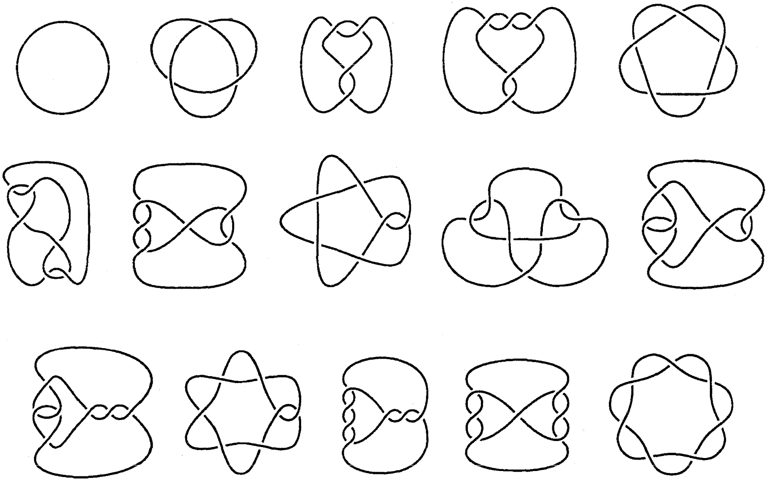


Figure 2. Knots to seven crossings.

Idea de Tait: listar todos posibles diagramas con número mínimo de cruces y posteriormente agrupar los que representan el mismo nudo.

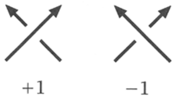
1. No estaba seguro si los diagramas de la tabla anterior representaban nudos distintos.
2. Probar que todos los nudos representados en la tabla anterior son distintos es una de las partes complicadas de la clasificación (no duplicados) junto con la primicidad.

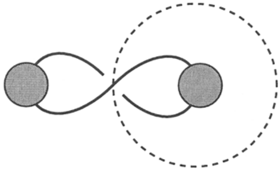
Conjeturas de Tait

Tait usó lo siguientes resultados en su clasificación:

Conjetura (I)

Un diagrama alternante reducido de un nudo es un diagrama con el mínimo número de cruces.





Conjetura (II)

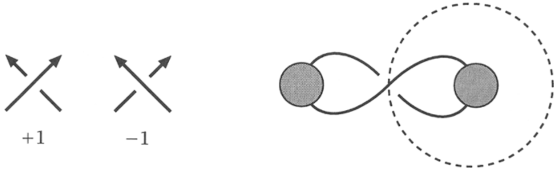
Cualesquiera dos diagramas alternantes reducidos de un nudo tienen igual número de Tait(suma de los signos).

Conjeturas de Tait

Tait usó lo siguientes resultados en su clasificación:

Conjetura (I)

Un diagrama alternante reducido de un nudo es un diagrama con el mínimo número de cruces.



Conjetura (II)

Cualesquiera dos diagramas alternantes reducidos de un nudo tienen igual número de Tait(suma de los signos).

Se probaron 100 años después usando el polinomio de Jones.

Pregunta

Depende el número de Tait de la orientación del diagrama del nudo?

Ejemplo

Calcular el número de Tait de los siguientes diagramas de nudos:

Pregunta

Depende el número de Tait de la orientación del diagrama del nudo?

Ejemplo

Calcular el número de Tait de los siguientes diagramas de nudos:

Pregunta

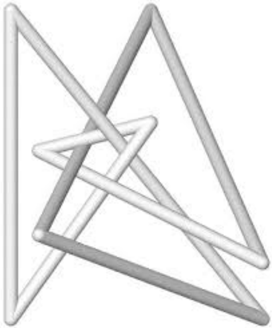
Es posible distinguir los nudos inducidos por los diagramas anteriores usando la segunda conjetura de Tait?

Ejercicio

Cuál es la relación entre el número de Tait del diagrama de un nudo K y el de su reflejado K^m?

Convención: nudos poligonales

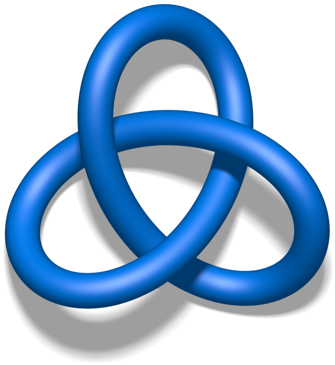
Asumiremos que todos los nudos que se estudiarán son poligonales, es decir, que están hechos de un número finito de segmentos.



Definición

Un nudo es una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^3$ que es poligonal finita.

Sin embargo, siempre se dibujarán como curvas suaves pero teniendo presente esta estructura poligonal finita.

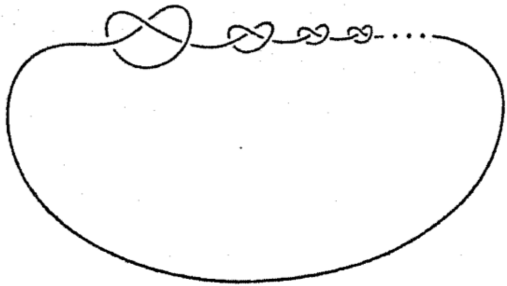


Nudos Salvajes

Se estudiarán nudos poligonales para evitar los nudos salvajes como el siguiente

Ejemplo

Curva simple cerrada en el espacio



Movidas elementales de nudos

Pregunta

Cuándo dos nudos serán el mismo o equivalentes?

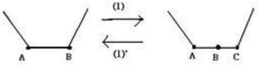


fig.10

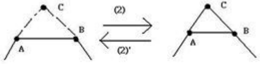


fig. 11

Movidas elementales de nudos

Pregunta

Cuándo dos nudos serán el mismo o equivalentes?

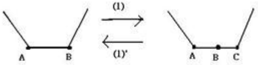


fig.10

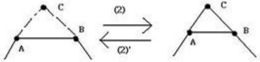


fig. 11

Definición

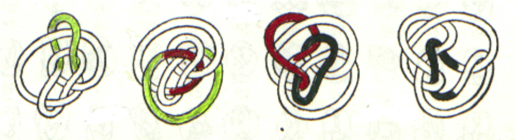
Sea K un nudo poligonal. Entonces las movidas elementales son:

1. *Dividir una arista AB en dos aristas AC y CB.*
2. *(Movida inversa de 1)*
3. *Sea C un punto en $\mathbb{R}^3$ tal que $C \notin K$. Si el $\triangle ABC$ inducido por AB y C no interseca a K con la excepción de la arista AB entonces remover AB y agregar las aristas AC y CB.*
4. *(Movida inversa de 3)*

Equivalencia de nudos

Nota (Par de Perko)

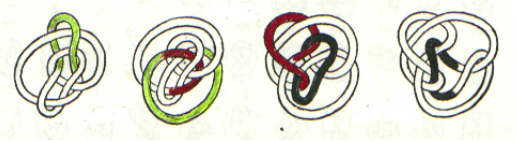
Al aplicar varias movidas elementales a un nudo se puede ver completamente distinto en principio:



Equivalencia de nudos

Nota (Par de Perko)

Al aplicar varias movidas elementales a un nudo se puede ver completamente distinto en principio:



Definición

Un nudo K s denomina equivalente (o igual) a un nudo K', denotado por $K \approx K'$, si K' se puede obtener de K aplicando un número finito de operaciones elementales.

$K \approx K'$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los nudos poligonales.

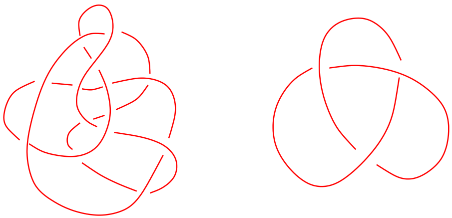
$K \approx K'$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los nudos poligonales.

Nota

La teoría de nudos estudia las clases de equivalencia sobre los nudos.

Ejercicio

Demostrar que los siguiente nudos son iguales:



Nota

Demostrar que un nudo no se puede deformar en otro es demostrar que están en distintas clases de equivalencia.

Movidas globales de nudos

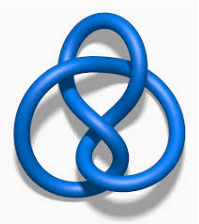
Definición

Dos nudos K_1 y K_2 en $\mathbb{R}^3$ se denominan equivalentes si existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface los siguiente:

1. *f es biyectiva continua,*
2. *f^{-1} es continua,*
3. *$f(K_1) = K_2$ y*
4. *f preserva la orientación de $\mathbb{R}^3$*

Ejemplo

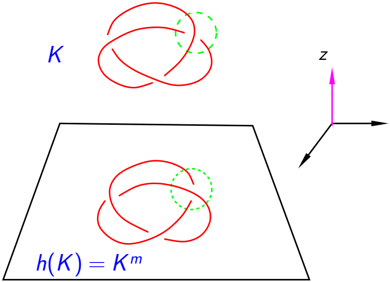
Demostrar que para $K = 4_1$ los 2 nudos K y K^m son equivalentes.



Preserva orientación?

Ejemplo

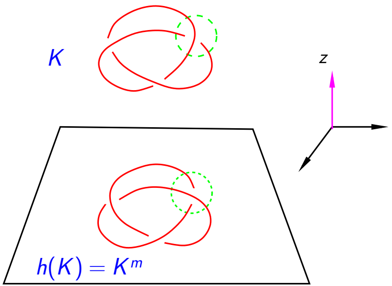
Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. *Entonces h no preserva orientación.*



Preserva orientación?

Ejemplo

Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. *Entonces h no preserva orientación.*



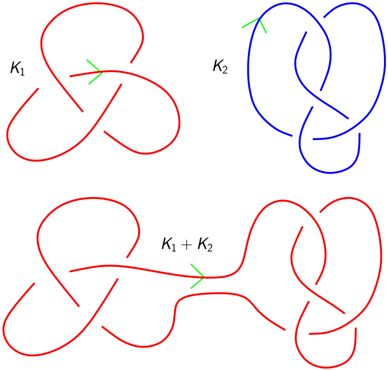
Teorema

Las dos definiciones de nudos equivalentes, es decir, la que viene de movidas elementales y la que viene de movidas globales de $\mathbb{R}^3$, *son definiciones equivalentes.*

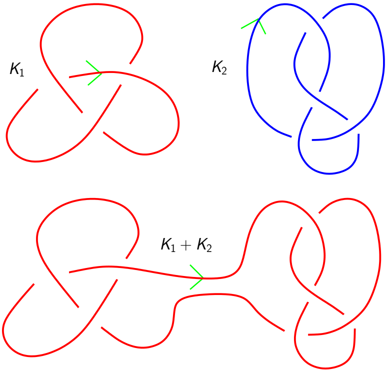
Suma conexa de nudos

Definición

Sean K_1 y K_2 dos nudos orientados. Se define su suma conexa*, denotada por $K_1 + K_2$, mediante:*



Eliminar un pequeño arco de más afuera en cada proyección y conectar los 4 extremos con 2 nuevos arcos sin introducir nuevos cruces de modo que las orientaciones coincidan.



Pregunta

La suma conexa de nudos orientados está bien definida*? Depende del arco elegido? Es* conmutativa *la operación? Existe un* neutro *aditivo? Existen los* inversos *aditivos?*

Nudos Primos

Definición

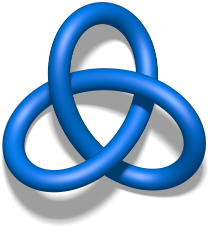
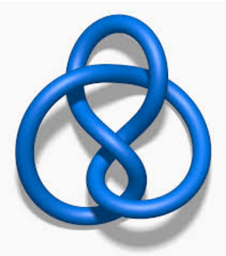
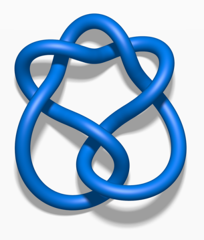
Un nudo K se denomina primo si no es el trivial y si $K = K_1 + K_2$ implica K_1 o K_2 trivial.

Pregunta

Cómo encontrar ejemplos de nudos primos?

Ejemplo

Los siguientes nudos son primos:

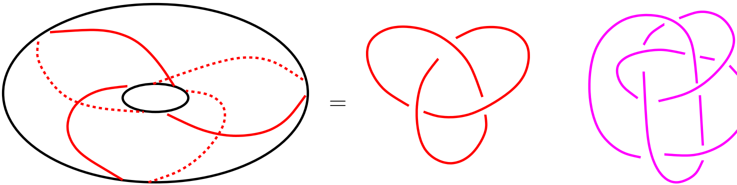




Nudos toroidales

Definición

Un nudo se denomina toroidal si es equivalente a un nudo que puede ser dibujado sin autointersecciones sobre el toro no anudado.

Ejemplo

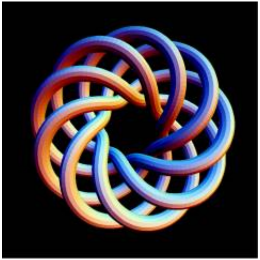


8_{19}

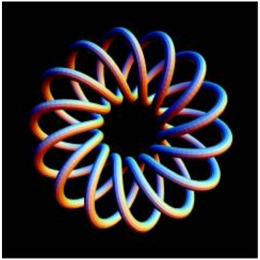
Teorema

Un nudo toroidal no trivial es primo.

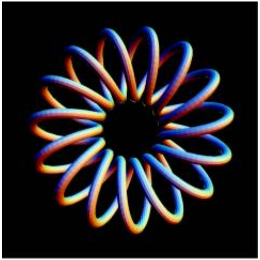
www.katlas.org



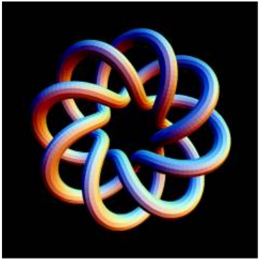
$T(9,5)$



$T(14,3)$



$T(15,2)$

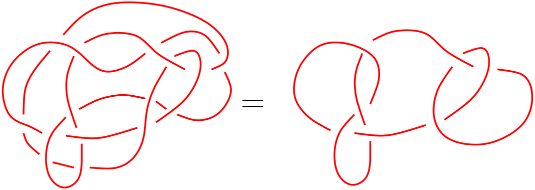


$T(8,3)$

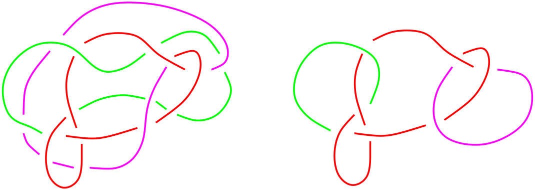
Teorema (Schubert-1947)

Todo nudo K tiene una expresión única (salvo orden) como una suma finita de nudos primos: $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$, K_i primo.

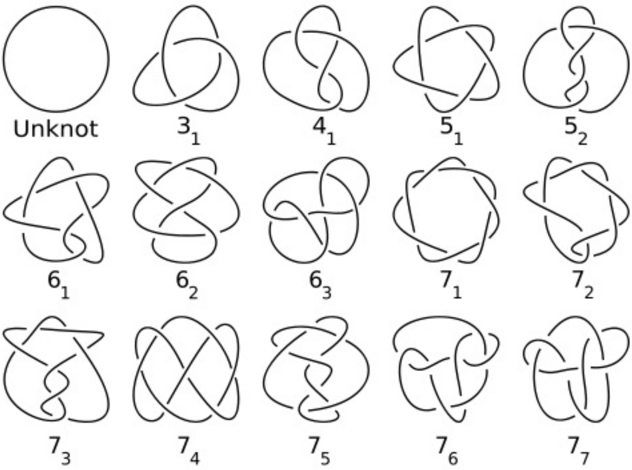
Ejemplo



k Ocho + Trebol



Nudos primos hasta 7 cruces



Nota

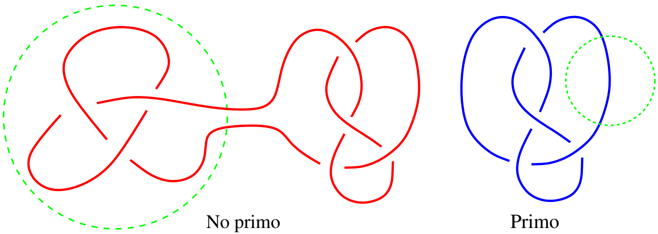
Diagramas con mínimo número de cruces.

Diagramas primos

Definición

Una diagrama *$D \subset S^2$ de un nudo K se denomina* primo *si para cada curva simple cerrada en S^2 que corte transversalmente a D en dos puntos acota en uno de sus dos lados un disco que intersecta D en un arco no anudado.*

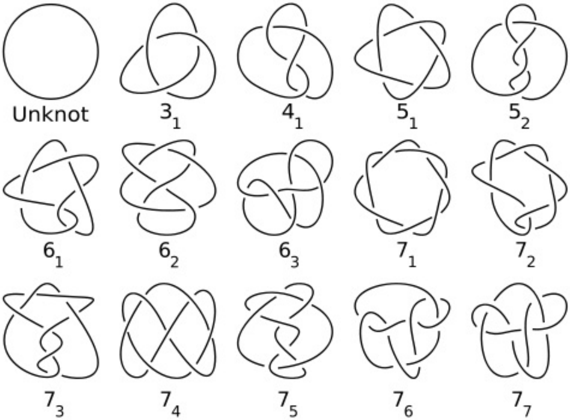
Ejemplo



Nudos alternantes primos

Teorema (Menasco-1984)

Sea K un nudo con un diagrama alternante D. Entonces K es primo si y sólo si D es un diagrama primo.



Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.

Historia

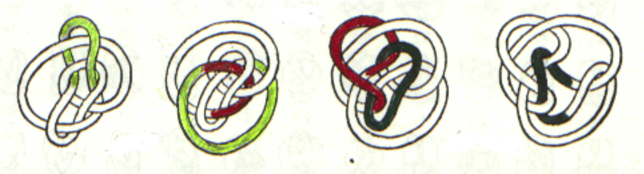
- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.
- 1970-Caudron-Bonahon-Siebemann-Perko-terminaron la clasificación hasta 11 cruces y se acabo la etapa de hacerlo a mano.

Historia

- 1899-Little-fue el primero en clasificar no alternantes. Publico una tabla con 43 no alternantes de 10 cruces que se creyo correcta por 75 años pero tenía una duplicación (Perko).
- 1927-Alexander-Briggs-distinguieron los nudos hasta 9 cruces excepto 3 pares.
- 1932-Reidemeister-completo la clasificación hasta 9 cruces.
- 1949-Schubert-factorización prima de nudos.
- 1960-Conway-nudos primos hasta 11 cruces sin embargo se le escaparon 4 no-alternantes de 11 cruces.
- 1970-Caudron-Bonahon-Siebemann-Perko-terminaron la clasificación hasta 11 cruces y se acabo la etapa de hacerlo a mano.
- 1981-Thisthethwaite-hasta 12 cruces (Computadoras).
- 1982-Thisthethwaite-hasta 13 cruces.

Error famoso

Un nudo y su reflejado, listados como 10_{161} y 10_{162}, no fue detectado hasta 1974 por Perko.



Ver la tabla de Rolfsen en la página Knot Atlas.

Ejercicio

Calcular el número de tait de los diagramas del par de Perko.

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

JIM HOSTE
Pitzer College
Claremont, CA 91711, USA
jhoste@pitzer.claremont.edu

MORWEN THISTLETHWAITE
University of Tennessee
Knoxville, TN 37996, USA
morwen@math.utk.edu

JEFF WEEKS
Canton, NY 13617, USA
weeks@geom.umn.edu

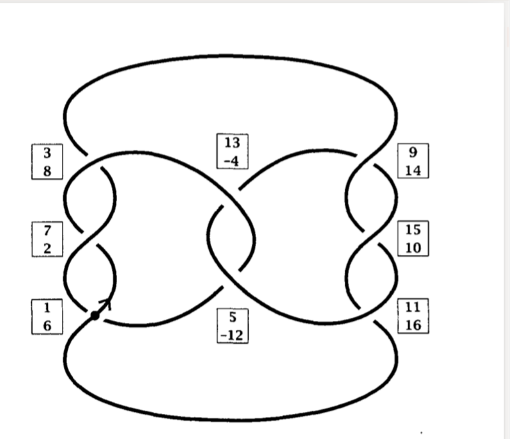
Jim Hoste received his Ph.D. from the University of Utah in 1982, spent a year at the Courant Institute of Mathematical Sciences as a National Science Foundation Postdoctoral Fellow, and is now a professor at Pitzer College, one of the Claremont Colleges. He works primarily in knot

Morwen Thistlethwaite is a professor of mathematics at the University of Tennessee, specializing in knot theory. He is a native of London, England, and came to the United States in 1987. He received his mathematical training at the universities of Cambridge, London, and Manchester. At

Jeff Weeks has an A.B. from Dartmouth College and a Ph.D. from Princeton University, both in mathematics. Now an independent consultant, he splits his time between research, education, and his family. Though primarily a topologist and geometer, he has recently fallen in with a

Código Dowker-Thisthethwaite (6,8,-12,2,14,16,-4,10)

Permite estudiar proyecciones de nudos en una computadora.



Asignar un signo -1 cada entero par que sea etiqueta de un cruce por arriba.

Contando códigos de D-T y las computadoras

Nota

Cada diagrama de un nudo con n cruces se puede codificar con una sucesión de los n primeros enteros pares.

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & -12 & 2 & 14 & 16 & -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= (6, 8, -12, 2, 14, 16, -4, 10) \end{aligned}$$

Contando códigos de D-T y las computadoras

Nota

Cada diagrama de un nudo con n cruces se puede codificar con una sucesión de los n primeros enteros pares.

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 6 & 8 & -12 & 2 & 14 & 16 & -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= (6, 8, -12, 2, 14, 16, -4, 10)\end{aligned}$$

Ejemplo

para cruces 8: el número de sucesiones de los 16 números 2,4,6,8,10,12,14,16 es 8!. Luego al considerar signos hay que analizar $8!2^8$ posibilidades.

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

# Cruces	#Nudos
3a	1
4a	1
5a	2
6a	3
7a	7
8a 8n	18 3
9a 9n	41 8
10a	123
10n	42

1998-Hoste, Thisthethwaite, Weeks - 1,701,936

# Cruces	#Nudos
3a	1
4a	1
5a	2
6a	3
7a	7
8a	18
8n	3
9a	41
9n	8
10a	123
10n	42

# Cruces	# Nudos
11a	367
11n	185
12a	1288
12n	888
13a	4878
13n	5110
14a	19536
14n	27436
15a	85263
15n	168030
16a	379799
16n	1,008,906

Cada nudo representa 1 o 2 nudos dependiendo si es equivalente a su reflejado o no.

Observaciones

1. Todos los nudos hasta 7 cruces son alternantes.
2. 1930: primera prueba de la existencia de nudos no alternantes.
3. Los nudos 8_{19}, 8_{20} y 8_{21} es posible probar que no son alternantes con el polinomio de Jones.
4. A partir de 13 cruces hay más nudos no-alternantes que alternantes.

Observaciones

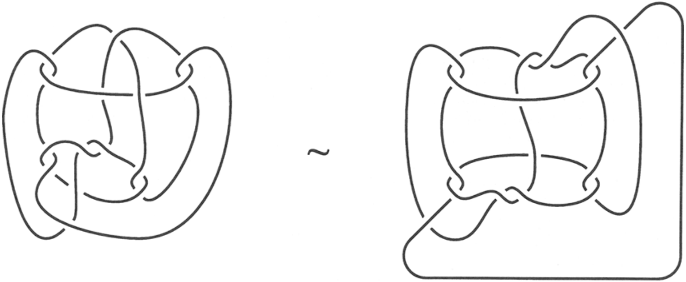
1. Todos los nudos hasta 7 cruces son alternantes.
2. 1930: primera prueba de la existencia de nudos no alternantes.
3. Los nudos 8_{19}, 8_{20} y 8_{21} es posible probar que no son alternantes con el polinomio de Jones.
4. A partir de 13 cruces hay más nudos no-alternantes que alternantes.

Problema Abierto

Determina la sucesión de enteros que comienza con
$1, 1, 2, 3, 7, 21, 49, 165, 552, 2176, 9988, \ldots$.

Descubrimiento

Inspirado en su tabla:
Conjetura de Tait: nudos anfiqueirales ($K \approx K^m$) con un número impar de cruces no existen.



Verdadero para $n = 13$: Thisthethwaite-1982.
Falso: Hoste-Thisthethwaite-Weeks encontraron un nudo de 15 cruces no alternante anfiqueiral (1988).

Nudos Anfiqueirales

Como consecuencia de la segunda conjetura de Tait es posible demostrar con la ayuda del número de Tait:

Teorema

Un nudo alternante cuyo mínimo número de cruces es impar no es anfiqueiral.

Aplicación:

Ejercicio

Demostrar el teorema anterior usando la segunda conjetura de Tait.