Familias de nudos e invariantes numéricos

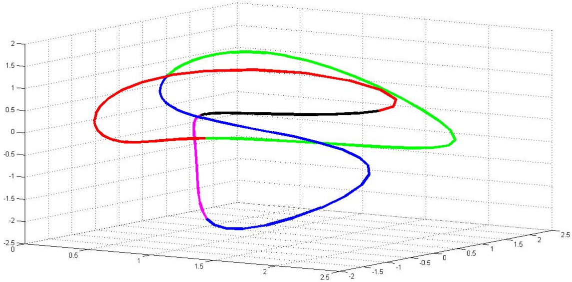
María de los Angeles Guevara Hernández

guevara.angeles@im.unam.mx

Escuela Fico González Acuña de Nudos y 3-Variedades

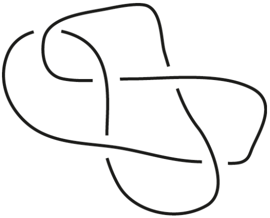
Definición

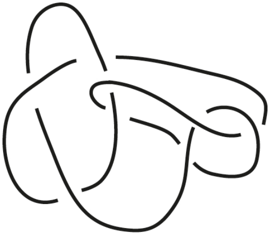
Un **nudo** *es un encaje del círculo* S^1 *en el espacio tridimensional* $\mathbb{R}^3$.
Un **enlace** *es la unión disjunta de círculos encajados en* $\mathbb{R}^3$.

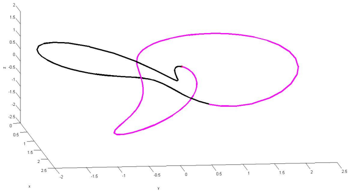


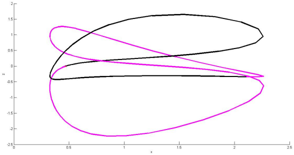
Definición

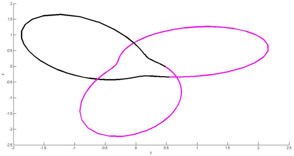
Dos nudos K_1 y K_2 en $\mathbb{R}^3$ se denominan **equivalentes** *si es posible deformar K_1 en K_2 sin romperlo.*



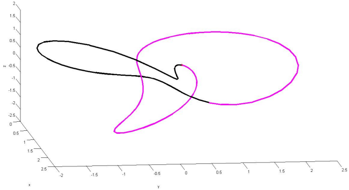


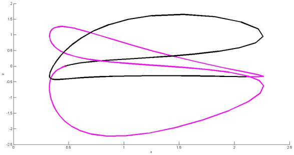


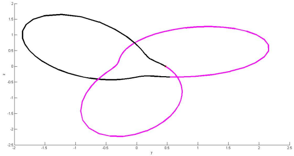


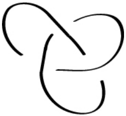


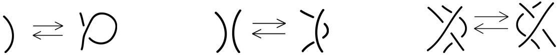
Diagramas





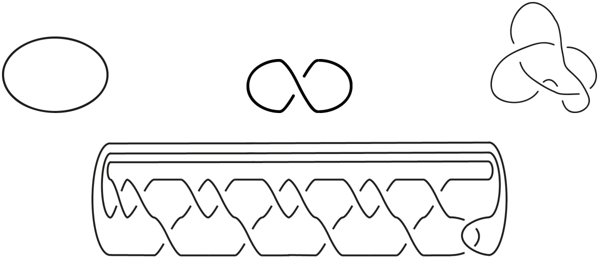






Definición

Si se puede deformar un diagrama regular D en uno D' mediante un número finito de movidas de Reidemeister o sus inversas, entonces se dice que D y D' son ***equivalentes****.*



Nudos equivalentes

Teorema (Reidemeister)

Dos nudos son equivalentes si y solo si sus diagramas son equivalentes.

Nudos equivalentes

Teorema (Reidemeister)

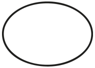
Dos nudos son equivalentes si y solo si sus diagramas son equivalentes.

$\{$Nudos$\}$=$\{$Diagramas módulo las movidas de Reidemeister$\}$

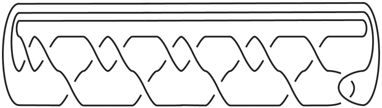
Teorema (Reidemeister)

Dos nudos son equivalentes si y solo si sus diagramas son equivalentes.

$\{$Nudos$\}$=$\{$Diagramas módulo las movidas de Reidemeister$\}$



$\dots$



Definición

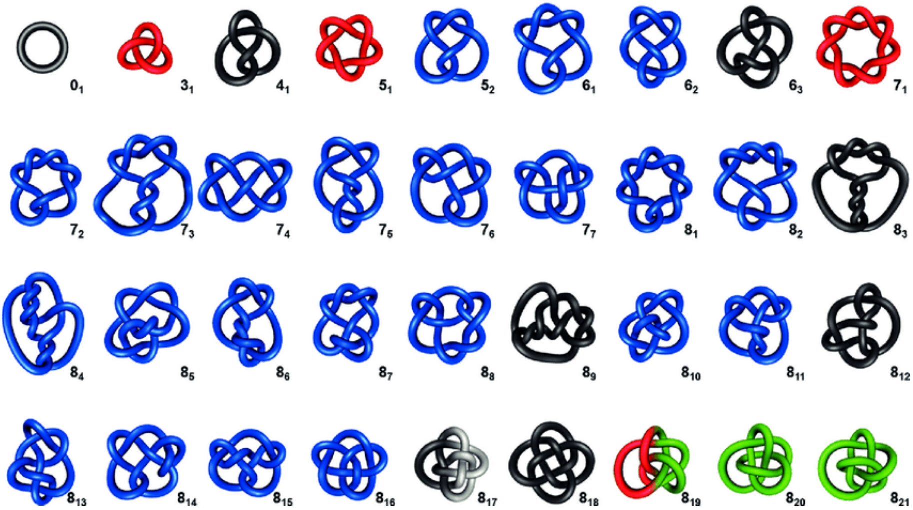
*Un **invariante** de un enlace es una función que toma a un enlace como entrada y como salida a una estructura matemática, tal como un número, un polinomio o un grupo. La estructura asociada tiene el mismo valor para enlaces equivalentes.*

Definición

*Un **invariante** de un enlace es una función que toma a un enlace como entrada y como salida a una estructura matemática, tal como un número, un polinomio o un grupo. La estructura asociada tiene el mismo valor para enlaces equivalentes.*

Si las estructuras asociadas a dos enlaces son distintas entonces los enlaces no son equivalentes.

Tabla y clasificación $cr(3_1) = 3$



D. P. Fielden, Stephen & A. Leigh, David & L. Woltering, Steffen. (2017). *Molecular Knots*, Angewandte Chemie International Edition, 56, 37 (11166-11194).

Definición

Un nudo que posee un diagrama alternante es llamado un ***nudo alternante****, de otro modo es llamado no alternante.*

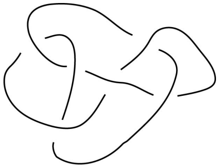


Diagrama alternante

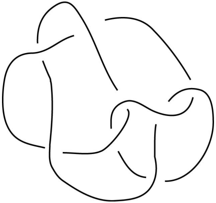


Diagrama no alternante

Definición

*Un nudo que posee un diagrama alternante es llamado un **nudo alternante**, de otro modo es llamado no alternante.*

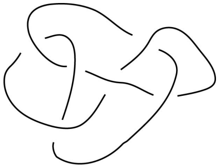


Diagrama alternante

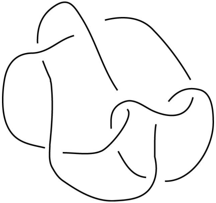
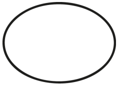


Diagrama no alternante

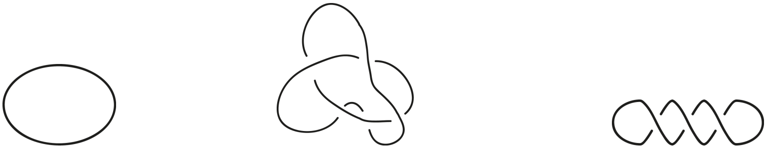
En 2015 Greene y Howie, de manera independiente, dieron una caracterización de los nudos alternantes.

0_1

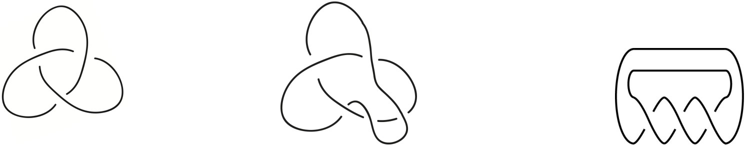


Diagramas equivalentes de nudos alternantes

0_1



3_1



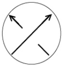
Polinomio de Alexander $\Delta(L;t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$

Definición

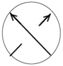
El ***polinomio de Alexander*** *de un enlace orientado L es obtenido por:*

1. $\Delta(\bigcirc) = 1$
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0)$

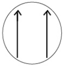
Donde (L_+, L_-, L_0) *es una madeja triple.*



L_+



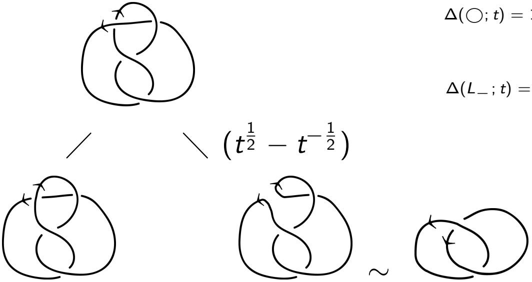
L_-



L_0

Ejemplo:  $= 1 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^2$

$= t - 1 + t^{-1}.$

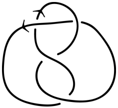


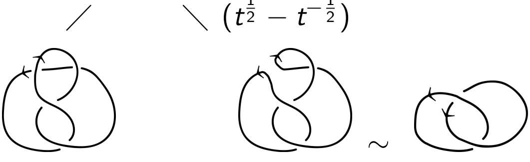
$\Delta(\bigcirc; t) = 1$

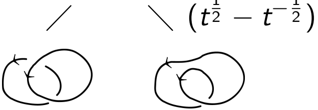
$\Delta(L_-; t) = \Delta(L_+; t) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0; t)$

$\Delta(\bigcirc; t) = 1$

$\Delta(L_-; t) = \Delta(L_+; t) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0; t)$

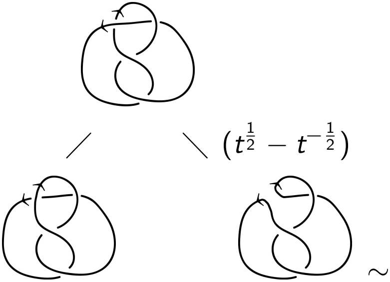


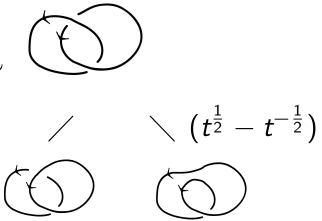




$\Delta(\bigcirc; t) = 1$

$\Delta(L_-; t) = \Delta(L_+; t) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0; t)$





$$\begin{aligned}
\Delta(L_-) &= \Delta(L_+) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) \\
&= 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) \\
&= 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(0 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})) \\
&= 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^2 \\
&= -t + 3 - t^{-1}
\end{aligned}$$

Teorema

Supóngase que K es un nudo alternante y

$$\Delta_K(t) = a_{-m}t^{-m} + a_{-m+1}t^{-m+1} + \ldots + a_m t^m$$

es su polinomio de Alexander con $a_m \neq 0 \neq a_{-m}$. Entonces

1. *$a_{-m}, a_{-m+1}, \ldots, a_m$ son distintos de cero;*
2. *los signos de dos coeficientes consecutivos alternan, i.e.,*

$$a_i a_{i+1} < 0 \quad (i = -m, -m+1, \ldots, m-1).$$

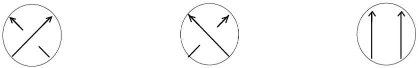
Si K es un nudo tal que su polinomio de Alexander no cumple (1) o (2), entonces es no alternante.

Polinomio de Jones $\quad V(L;t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$

El **polinomio de Jones** de un enlace orientado es caracterizado de la siguiente manera:

1. $V(\bigcirc) = 1$
2. $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$

donde (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple.



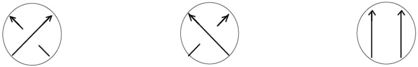
L_+ $\qquad$ L_- $\qquad$ L_0

Polinomio de Jones $V(L;t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$

El **polinomio de Jones** de un enlace orientado es caracterizado de la siguiente manera:

1. $V(\bigcirc) = 1$
2. $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$

donde (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple.



L_+ L_- L_0

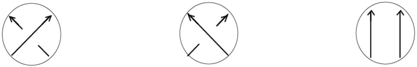
Ejemplo:  $= t + t^3 - t^4$.

Polinomio de Jones $V(L; t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$

El **polinomio de Jones** de un enlace orientado es caracterizado de la siguiente manera:

1. $V(\bigcirc) = 1$
2. $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$

donde (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple.



L_+ L_- L_0

Ejemplo:  $= t + t^3 - t^4.$

Si K es un nudo alternante, entonces

$$max\ \ deg\ V_K(t) - min\ \ deg\ V_K(t) = cr(K)$$

Determinante de un enlace $det(L)$

- El determinante de un enlace puede ser definido como el valor absoluto del polinomio de Alexander en -1 y como el polinomio de Jones en -1.

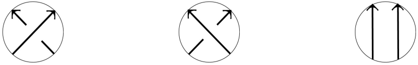
- El determinante es el orden del primer grupo de homología de la doble cubierta ramificada del complemento del enlace.

$$det(L) = |H_1(X_2)|$$

Polinomio de Conway $\nabla_L(z)$

1. $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$
2. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$

donde $\bigcirc$ es el nudo trivial y (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple de enlaces orientados.

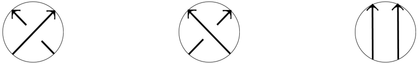


L_+ $\qquad$ L_- $\qquad$ L_0

Polinomio de Conway $\nabla_L(z)$

1. $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$
2. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$

donde $\bigcirc$ es el nudo trivial y (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple de enlaces orientados.



L_+ $\quad$ L_- $\quad$ L_0

Cambiando variables $z = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ se tiene el siguiente resultado.

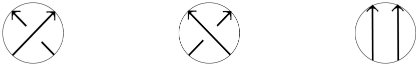
Teorema (Murasugi)

Sea L un enlace orientado, entonces $\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

Polinomio de Conway $\nabla_L(z)$

1. $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$
2. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$

donde $\bigcirc$ es el nudo trivial y (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple de enlaces orientados.



L_+ $\qquad$ L_- $\qquad$ L_0

Cambiando variables $z = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema (Murasugi)

Sea L un enlace orientado, entonces $\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

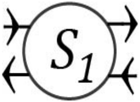
$$|\Delta_L(-1)| = |\nabla_L(2i)|.$$

Definición

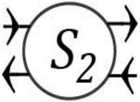
*Un n-**ovillo** es un par (B^3, T) donde B^3 es una 3-bola y T es una subvariedad uno-dimensional con frontera no vacía, la cual contiene n arcos y satisface $\partial T = T \cap \partial B^3$.*

Diagramas de 2-ovillos

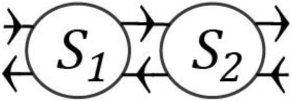
Concatenación de ovillos.



S_1

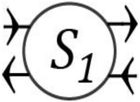


S_2

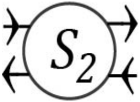


$S_1 + S_2$

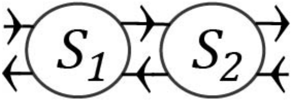
Concatenación de ovillos.



S_1

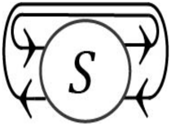


S_2



$S_1 + S_2$

Denotamos las cerraduras del ovillo S como S^N y S^D.



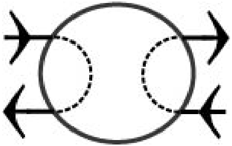
Existen formulas para calcular el polinomio de Conway de S^N y S^D cuando S es la concatenación de dos ovillos.

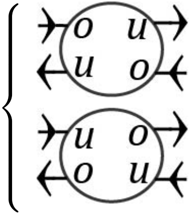
Lema (Giller 1982)

$$\begin{aligned}
\nabla_{(S_1+S_2)^N}(z) &= \nabla_{S_1^N}(z)\nabla_{S_2^D}(z) + \nabla_{S_1^D}(z)\nabla_{S_2^N}(z) \quad (1)\\
\nabla_{(S_1+S_2)^D}(z) &= \nabla_{S_1^D}(z)\nabla_{S_2^D}(z) \quad (2)
\end{aligned}$$

$0^N = 0, \infty^N = 1, 0^D = 1, \infty^D = 0.$

1

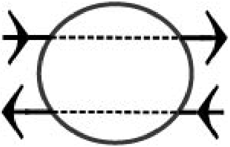


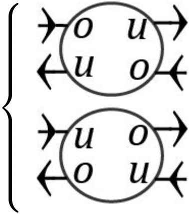


1 a

1 b

2



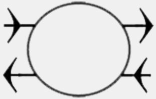


2 a

2 b

Sea $\hat{c}(S)$ el número de componentes cerradas en el ovillo S, entonces

Lema

Si $S =$  *es un 2-ovillo alternante, entonces*

$$sign(\nabla_{S^N}(2i))sign(\nabla_{S^D}(2i)) > 0 \quad \begin{cases} \textit{si } S \textit{ es del tipo 1a o 2b} \\ \textit{y } \hat{c}(S) \equiv 0 \mod (2); \\ \textit{si } S \textit{ es del tipo 1b o 2a} \\ \textit{y } \hat{c}(S) \equiv 1 \mod (2). \end{cases}$$

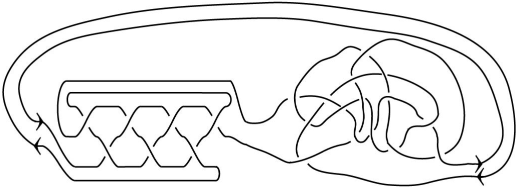
$$sign(\nabla_{S^N}(2i))sign(\nabla_{S^D}(2i)) < 0 \quad \begin{cases} \textit{si } S \textit{ es tipo 1a o 2b} \\ \textit{y } \hat{c}(S) \equiv 1 \mod (2); \\ \textit{si } S \textit{ es del tipo 1b o 2a} \\ \textit{y } \hat{c}(S) \equiv 0 \mod (2). \end{cases}$$

Teorema

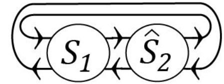
Existe una familia de pares de nudos alternantes (K, K') donde K no tiene bigonos y K' tiene un bigono, con $cr(K) = cr(K')$ tal que $det(K) < det(K')$.

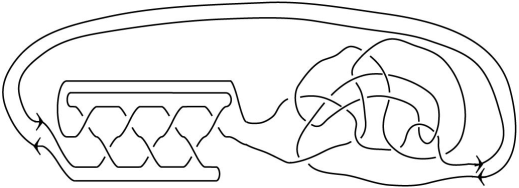
Sin bigonos

$K =$ 



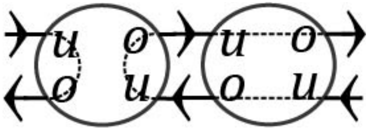
Con un bigono

$K' =$ 



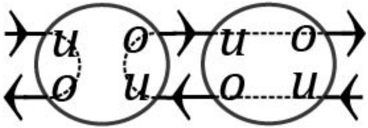
$$
\begin{aligned}
det((S_1 + S_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(1753) + (\nabla_{S_1^D}(2i))(928i)| \\
det((S_1 + \hat{S}_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(-1755) + (\nabla_{S_1^D}(2i))(-972i)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det((S_1+S_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(1753)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(928i)| \\
det((S_1+\hat{S}_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(-1755)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(-972i)|
\end{aligned}
$$



Si $(S_1+S_2)^N$ y $(S_1+\hat{S}_2)^N$ son nudos alternantes con S_2 y $\hat{S}_2$ del tipo 2b entonces S_1 es del tipo 1b.

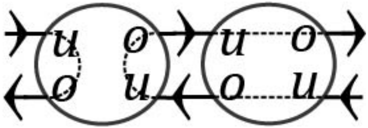
$$
\begin{aligned}
det((S_1+S_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(1753)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(928i)| \\
det((S_1+\hat{S}_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(-1755)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(-972i)|
\end{aligned}
$$



Si $(S_1+S_2)^N$ y $(S_1+\hat{S}_2)^N$ son nudos alternantes con S_2 y $\hat{S}_2$ del tipo 2b entonces S_1 es del tipo 1b.

$\nabla_{S_1^N}(2i)=x$, $\nabla_{S_1^D}(2i)=yi$ con $xy<0$.

$$\begin{aligned} det((S_1+S_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(1753)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(928i)| \\ det((S_1+\hat{S}_2)^N) &= |(\nabla_{S_1^N}(2i))(-1755)+(\nabla_{S_1^D}(2i))(-972i)| \end{aligned}$$



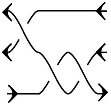
Si $(S_1+S_2)^N$ y $(S_1+\hat{S}_2)^N$ son nudos alternantes con S_2 y $\hat{S}_2$ del tipo 2b entonces S_1 es del tipo 1b.
$\nabla_{S_1^N}(2i)=x$, $\nabla_{S_1^D}(2i)=yi$ con $xy<0$.

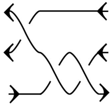
$$\begin{aligned} det((S_1+S_2)^N) &= |(x)(1753)+(yi)(928i)| \\ det((S_1+\hat{S}_2)^N) &= |(x)(-1755)+(yi)(-972i)| \end{aligned}$$

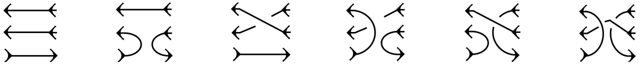
$$det((S_1+S_2)^N) < det((S_1+\hat{S}_2)^N)$$

□

3-ovillos

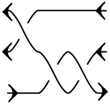


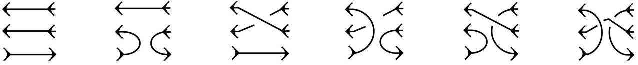




χ_1 χ_2 χ_3 χ_4 χ_5 χ_6

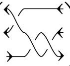
$$\nabla(T) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(\chi_i)\,, \text{ where } p_i \in \mathbb{Z}[z].$$





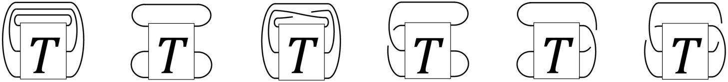
χ_1 χ_2 χ_3 χ_4 χ_5 χ_6

$$\nabla(T) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(\chi_i) \text{ , where } p_i \in \mathbb{Z}[z].$$

Ejemplo: $\nabla\Bigg($  $\Bigg) = \nabla\Big($  $\Big) - z\,\nabla\Big($  $\Big)$.

$p_1 = p_2 = p_5 = p_6 = 0$, $p_3 = 1$ and $p_4 = -z$.

Cerraduras $N_j(T)$ $j = 1, ..., 6$.



Nota

Si $\nabla(T) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(\chi_i)$ *entonces* $\nabla(N_j(T)) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(N_j(\chi_i))$.
$N_1(\chi_i \cdot T) = N_i(T)$.

Lema

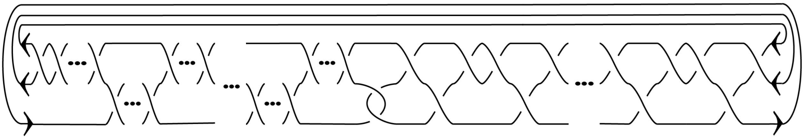
Si $\nabla(T_1) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(\chi_i)$ *y* $\nabla(T_2) = \sum_{i=1}^{6} q_i \nabla(\chi_i),$

entonces

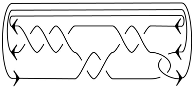
$$\begin{aligned}
&\nabla(T_1 \cdot T_2) = \\
&(p_1 q_1 + p_3 q_3)\nabla(\chi_1) \\
&+(p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_2 q_4 + p_3 q_4 + p_5 q_2 + p_5 q_3 + z p_5 q_4)\nabla(\chi_2) \\
&+(p_1 q_3 + p_3 q_1 + z p_3 q_3)\nabla(\chi_3) \\
&+(p_1 q_4 + p_3 q_2 + p_4 q_1 + p_4 q_4 + p_6 q_2 + z p_3 q_4 + p_6 q_3 + z p_6 q_4)\nabla(\chi_4) \\
&+(p_1 q_5 + p_2 q_3 + p_2 q_6 + p_3 q_6 + p_5 q_1 + p_5 q_5 + z p_5 q_3 + z p_5 q_6)\nabla(\chi_5) \\
&+(p_1 q_6 + p_3 q_5 + p_4 q_3 + p_4 q_6 + p_6 q_1 + p_6 q_5 + z p_3 q_6 + z p_6 q_3 + z p_6 q_6)\nabla(\chi_6)
\end{aligned}$$

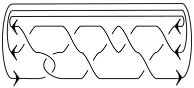
y

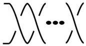
$$\nabla(N_1(T_1 \cdot T_2)) = \sum_{i=1}^{6} p_i \, \nabla(N_i(T_2)) = \sum_{i=1}^{6} q_i \, \nabla(N_i(T_1)).$$



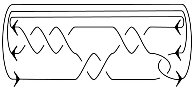
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$

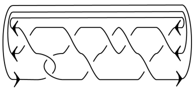


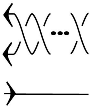




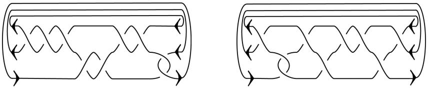
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$

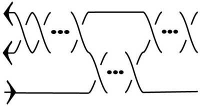




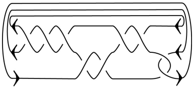


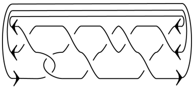
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$

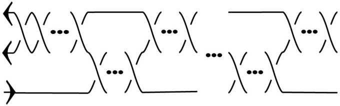




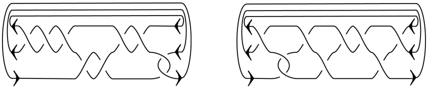
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$

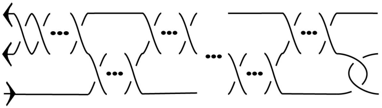




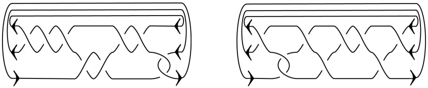


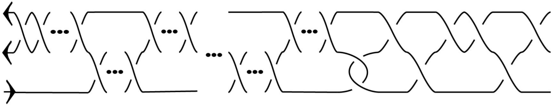
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$



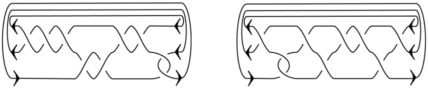


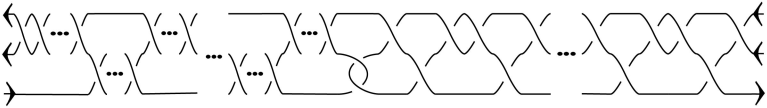
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$



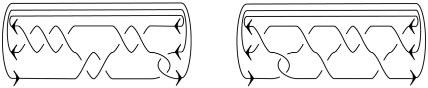


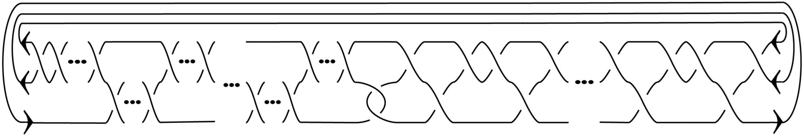
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$



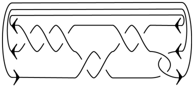


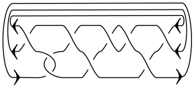
$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$





$$N_1(\mathcal{T}(2l+1, 2n_1, 2m_1, ..., 2n_r, 2m_r) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$$





Nudos no alternantes

Corolario

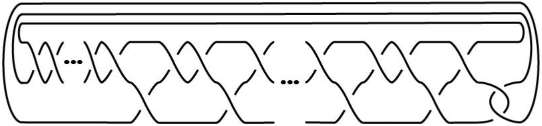
Sea T un 3-ovillo y $k \in \mathbb{N}$. Si $\nabla(T) = \sum_{i=1}^{6} p_i \nabla(\chi_i)$

entonces,

$$\nabla(N_1(T \cdot \mathcal{E}^{2k})) = p_1 \nabla(N_1(\mathcal{E}^{2k})) + p_3 \nabla(N_3(\mathcal{E}^{2k})) + \nabla(N_1(T)).$$

Lema

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tenemos que*
$\Delta(N_1(\mathcal{E}^{2k})) = -(t^{-k} + t^k) + 2,$
$\Delta(N_3(\mathcal{E}^{2k})) = (t^{-(k+\frac{1}{2})} - t^{k+\frac{1}{2}}) + t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}.$



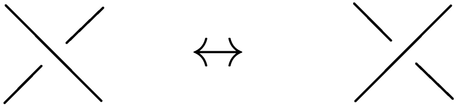
Teorema

Para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ los nudos $N_1(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son no alternantes.

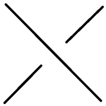
$$\Delta(N_1(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$$

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{i=1}^{l-1}(t^{-i}+t^{i})(-1)^{l-1-i}\right]+(-1)^{l} \\ &\quad +(t^{-(l+1)}+t^{(l+1)}) \\ &\quad +(t^{-(l+k)}+t^{(l+k)}-t^{-((l+k)+1)}-t^{((l+k)+1)}). \qquad (3) \end{aligned}$$

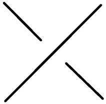
Cambio de cruce



Cambio de cruce

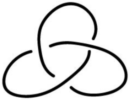


$\leftrightarrow$

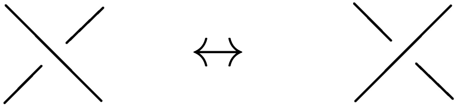


Ejemplo:

3_1

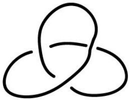


Cambio de cruce

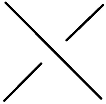


Ejemplo:

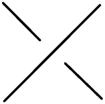
3_1



Cambio de cruce

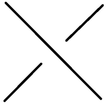
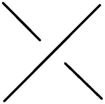


$\leftrightarrow$



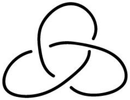
Ejemplo:

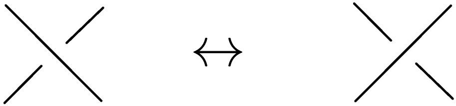
3_1

 $\leftrightarrow$ 

Ejemplo:

3_1



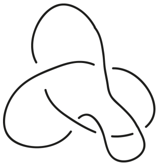


Ejemplo:

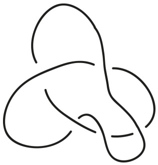
3_1

$u(3_1) = 1.$

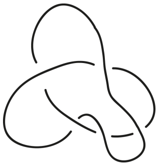
Cambios de cruce en un digrama

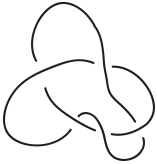


Cambios de cruce en un digrama

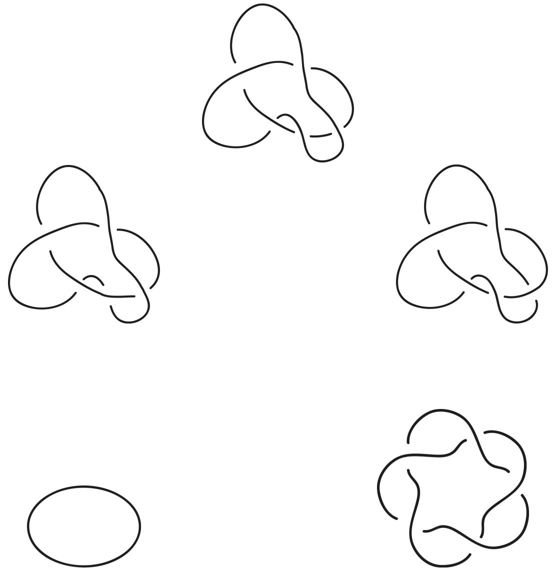


Cambios de cruce en un digrama





Cambios de cruce en un digrama



Definición (Adams et al., 1992)

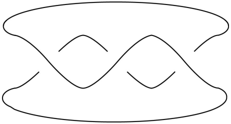
El número de dealternancia de un diagrama D, $dalt(D)$, es el número mínimo de cambios de cruces necesarios para transformar D en algún diagrama alternante.
El número de dealternancia de un enlace L se define de la siguiente manera:

$$dalt(L) = min\ \{dalt(D) \mid D \text{ es un diagrama de } L\}.$$

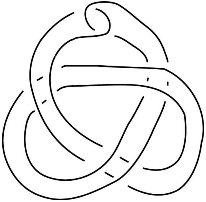
Definición (Adams et al., 1992)

El número de dealternancia de un diagrama D, $dalt(D)$, es el número mínimo de cambios de cruces necesarios para transformar D en algún diagrama alternante.
El número de dealternancia de un enlace L se define de la siguiente manera:

$$dalt(L) = min\ \{dalt(D) \mid D \text{ es un diagrama de } L\}.$$



$dalt(D) = 1$

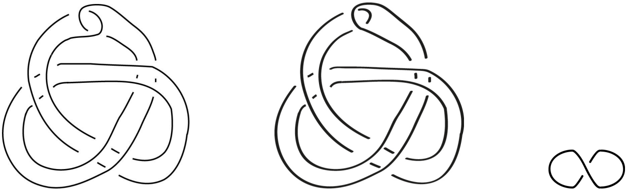


$dalt(D) = 6$

Definición (Kawauchi, 2010)

El número de alternancia de un diagrama D es el número mínimo de cambios de cruce necesarios para transformar D en algún diagrama (posiblemente no alternante) de un enlace alternante.
El número de alternancia de un enlace L se define de la siguiente manera:

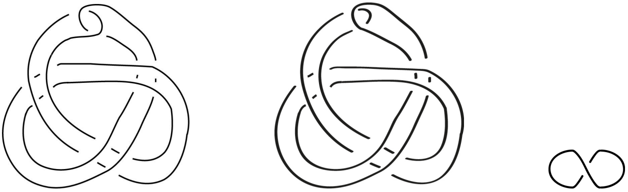
$$alt(L) = min \{alt(D) \mid D \text{ es un diagrama de } L\}.$$



Definición (Kawauchi, 2010)

El número de alternancia de un diagrama D es el número mínimo de cambios de cruce necesarios para transformar D en algún diagrama (posiblemente no alternante) de un enlace alternante.
El número de alternancia de un enlace L se define de la siguiente manera:

$$alt(L) = min\ \{alt(D)\ \mid\ D \text{ es un diagrama de } L\}.$$



$alt(L) = dalt(L) = 0$ si y solo si L es alternante.

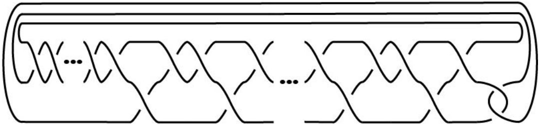
Invariantes

$$
\begin{array}{ccccccc}
w_{Kh}(K)-2 & \leq & g_T(K) & \leq & dalt(K) & & \\
 & & \vee\!| & & \vee\!| & & \\
 & & \frac{|\sigma(K)-s(K)|}{2} & \leq & alt(K) & \leq & u(K)
\end{array}
$$

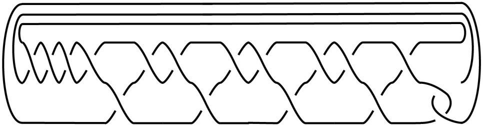
$w_{Kh}(K)$: el ancho de la homología de Khovanov;
$g_T(K)$: género de Turaev;
$dalt(K)$: número de dealternancia;
$alt(K)$: número de alternancia;
$\sigma(K)$: la signatura;
$s(K)$; el Rasmussen s-invariante;
$u(K)$: número de desanudamiento.

$w_{Kh}(K) - 2 \leq g_T(K)$ [Champanerkar et al., 2007] and [Champanerkar and Kofman, 2009];
$g_T(K) \leq dalt(K)$ [Abe and Kishimoto, 2010] ;
$\frac{|\sigma(K)-s(K)|}{2} \leq g_T(K)$ [Dasbach and Lowrance, 2011];
$\frac{|\sigma(K)-s(K)|}{2} \leq alt(K)$ [Abe, 2009].

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.

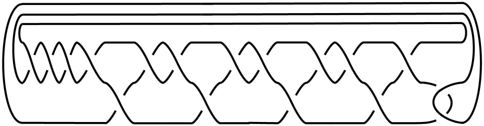


[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



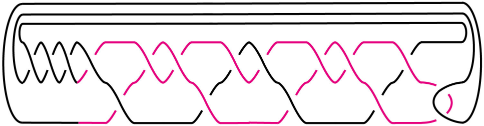
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



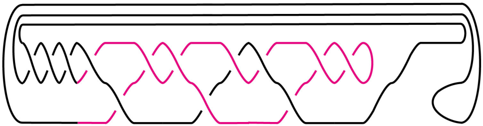
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.

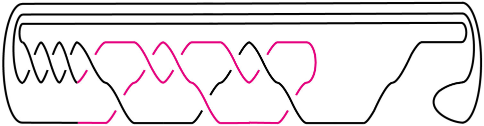


$alt(K)$ y $dalt(K)$

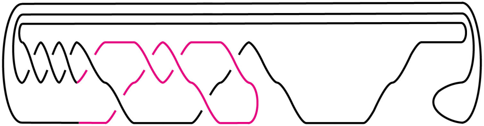
[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



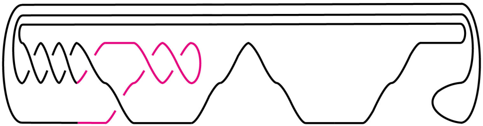
[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.

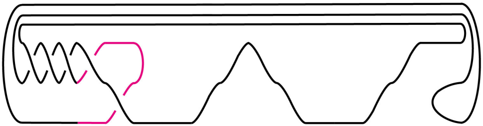


[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



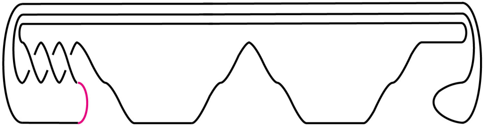
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



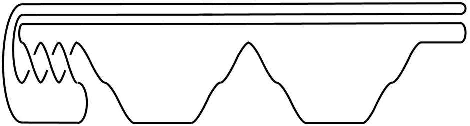
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



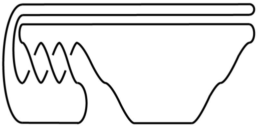
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



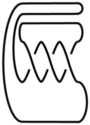
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



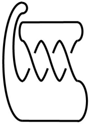
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



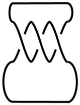
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



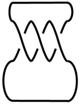
$alt(K)$ y $dalt(K)$

[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.

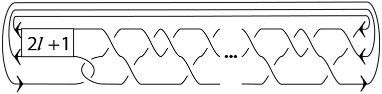


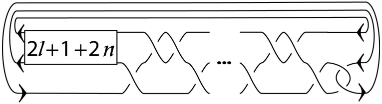
$alt(K)$ y $dalt(K)$

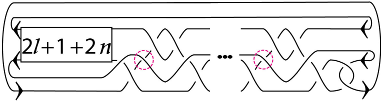
[G., 2017] Para cada n existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $\mathcal{DS}_n$ tal que si $K \in \mathcal{DS}_n$ entonces $alt(K) = 1$ y $dalt(K) = n$.



$$dalt(K) \leq n$$







Gracias por su atención.