

## Cirugía de nudos en la 3 esfera



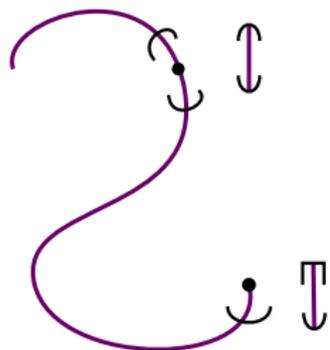
**Araceli Guzmán Tristán**

**Escuela “Fico González Acuña” de nudos y 3-variedades  
2024**

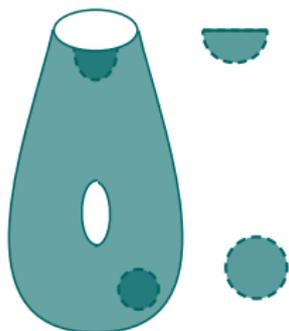
# $n$ -variedades

Una  $n$ -variedad es un espacio topológico que localmente “se ve como”  $\mathbb{R}^n$ .

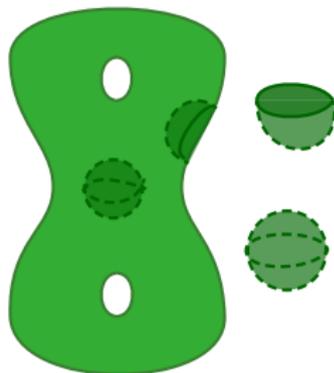
1-variedad



2-variedad



3-variedad



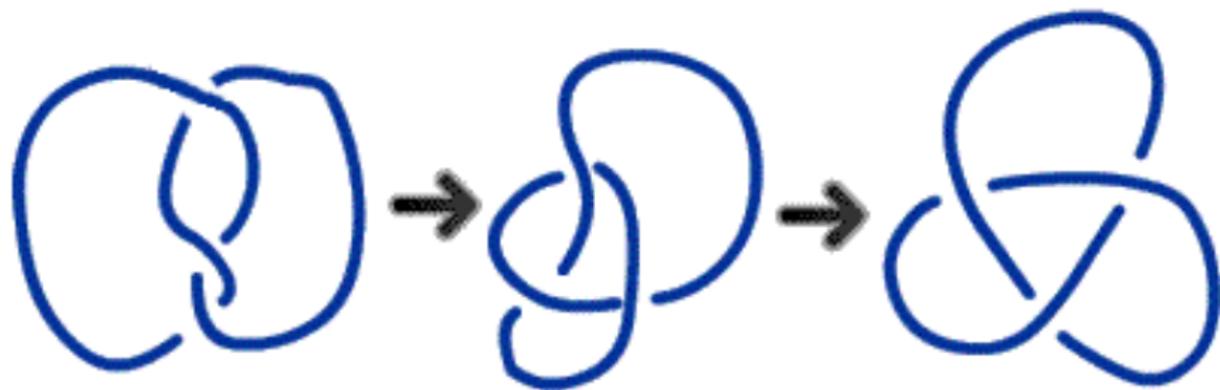
Un nudo es una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^3$  o  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  y que es poligonal finita.



Siempre es posible dibujarlos de manera “bonita”.

## Las reglas

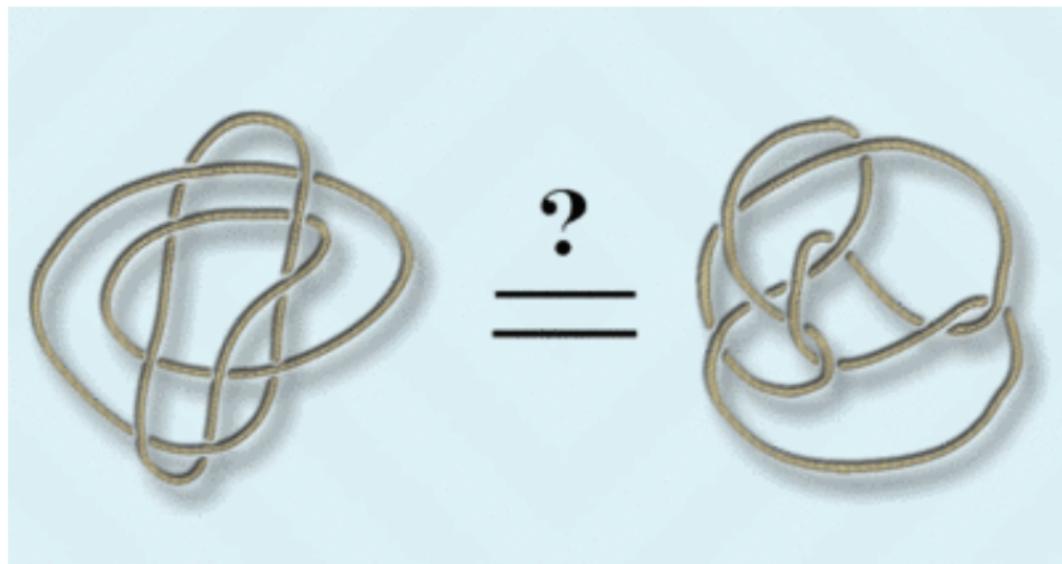
Se vale deformar el nudo en el espacio tanto como queramos pero no se vale romperlo y volverlo a pegar.



Dos nudos se consideran equivalentes si existe un homeomorfismo que preserva la orientación  $h: S^3 \rightarrow S^3$  que mapea uno en el otro.

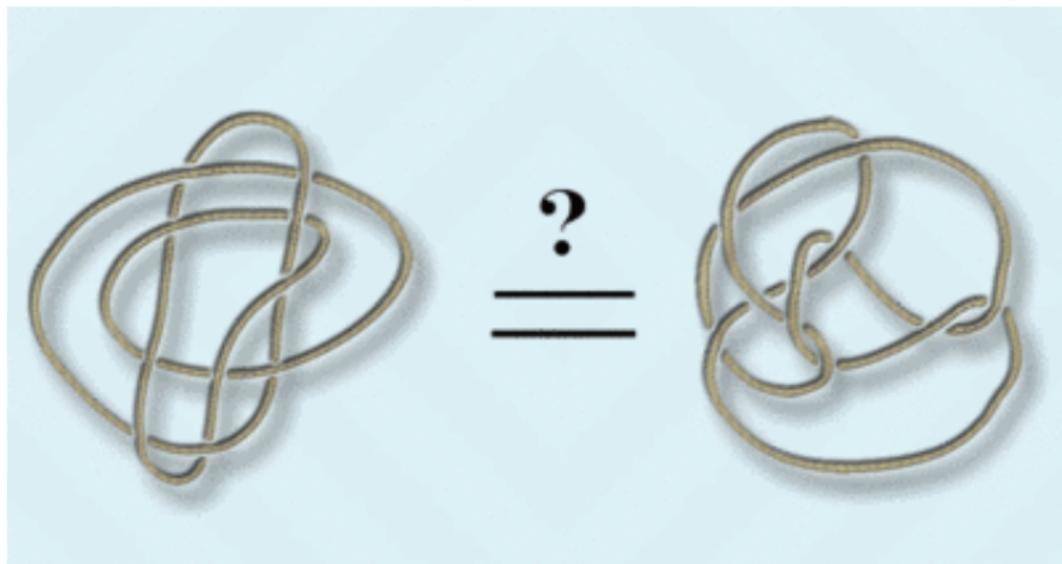
# Problema fundamental en la Teoría de Nudos

Poder decidir si dos nudos dados son el mismo ó no.



# Problema fundamental en la Teoría de Nudos

Poder decidir si dos nudos dados son el mismo ó no.



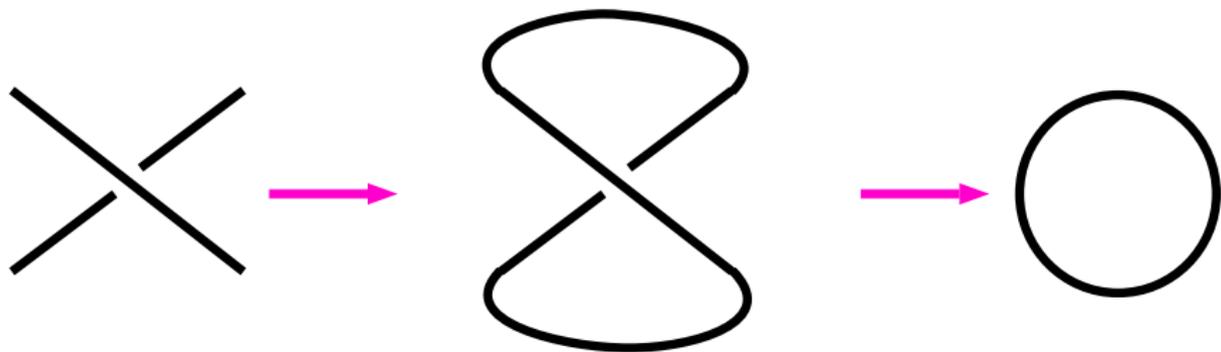
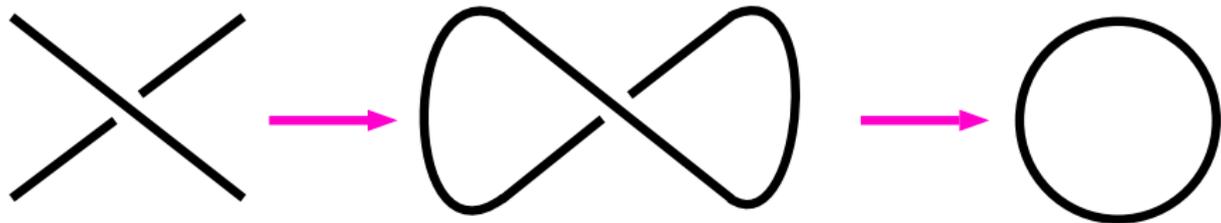
Este no es un problema sencillo. Por ejemplo, en la imagen se muestran 2 nudos aparentemente distintos y eso se pensó durante 100 años, hasta que en 1973, Perko demostró que eran iguales.

Una primer forma de determinar si dos nudos son el mismo puede ser al fijarnos en su cantidad mínima de cruces.

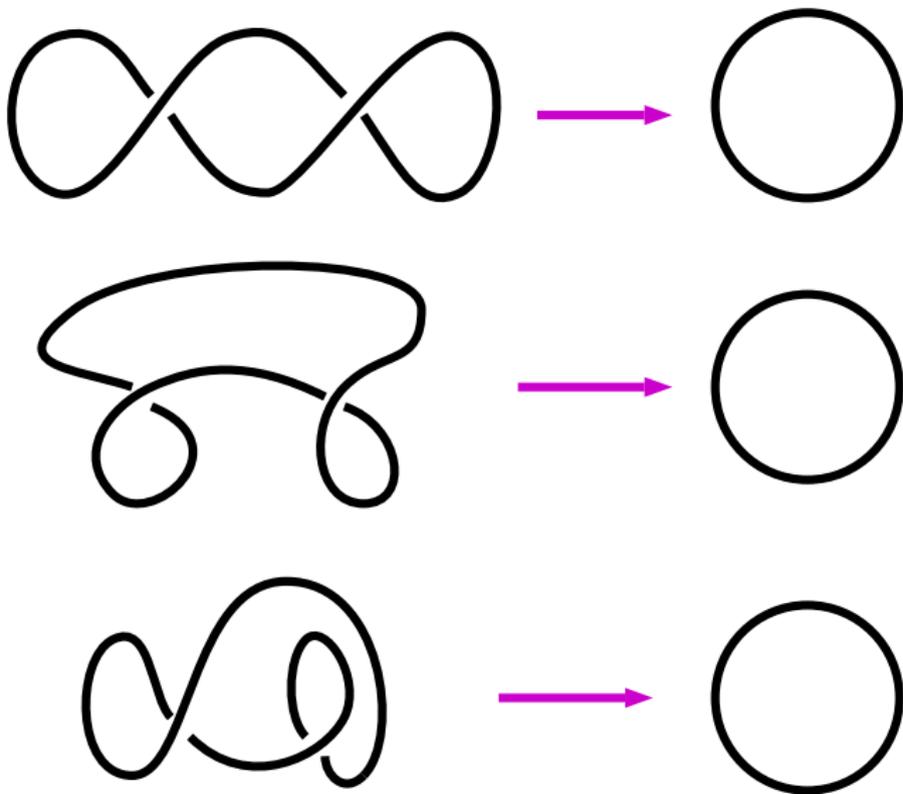
Por ejemplo, solamente hay un nudo sin cruces (el trivial).



Los nudos de un cruce son iguales al trivial.



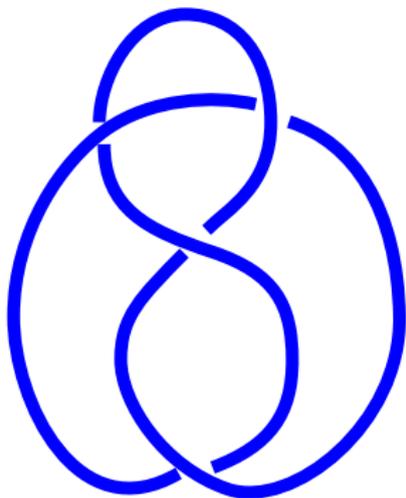
Los nudos con dos cruces se pueden deformar hasta hacerlos triviales.



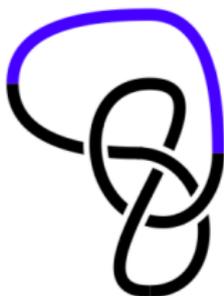
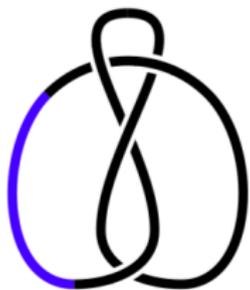
Hay 2 nudos con 3 cruces (el trébol y su imagen especular).



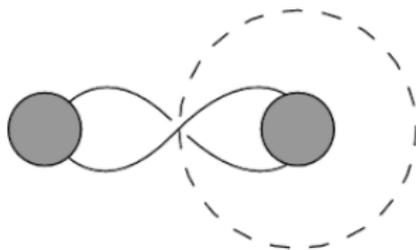
Hay un solo nudo con 4 cruces (el nudo 8).



Este nudo sí es equivalente a su imagen especular (es anfiquiral).



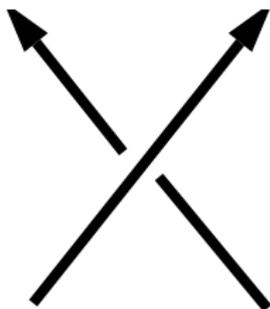
Con la misma idea podemos obtener nudos con tantos cruces como queramos, sin embargo no podemos asegurar que tengan el mínimo número de cruces. Un primer paso podría ser eliminar los cruces triviales:



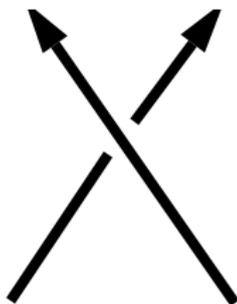
P. Tait en 1877 tenía la conjetura de que si al eliminar los cruces triviales obtenemos un diagrama alternante, entonces dicho diagrama tendrá el mínimo número de cruces.



Tait también tuvo la idea de orientar los nudos y asignar un signo a cada cruce de la siguiente forma:



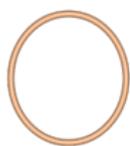
+1



-1

Creía que en cualquier representación reducida y alternante de un nudo, la suma de los signos permanecería invariante.

Asumiendo ambas conjeturas, Tait en 1877 elaboró la primer tabla de nudos conocida.



Unknot



$3_1$



$4_1$



$5_1$



$5_2$



$6_1$



$6_2$



$6_3$



$7_1$



$7_2$



$7_3$



$7_4$



$7_5$



$7_6$

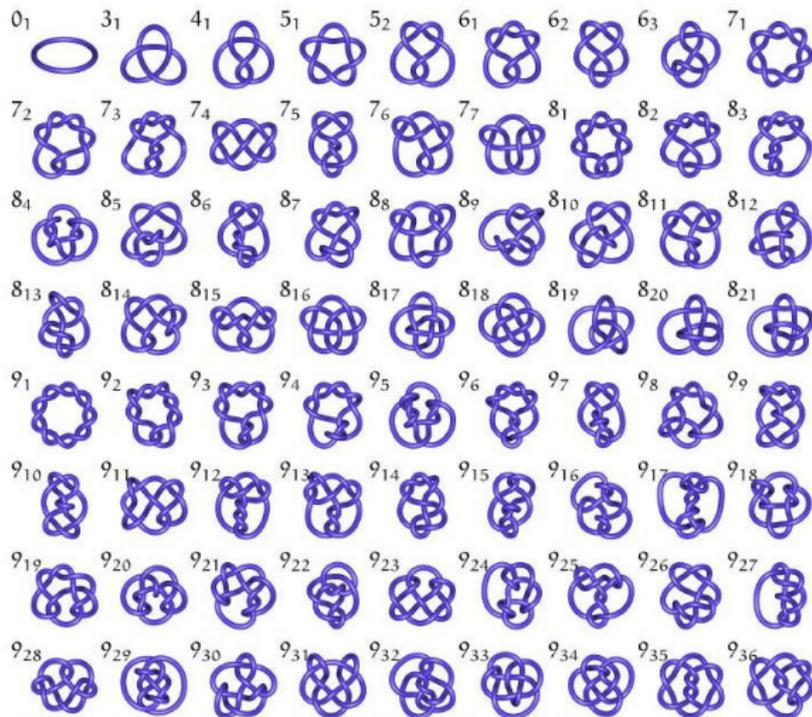


$7_7$

**Las conjeturas de Tait se probaron 100 años después.**

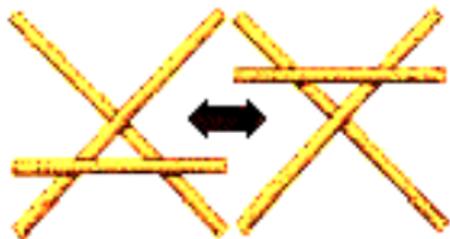
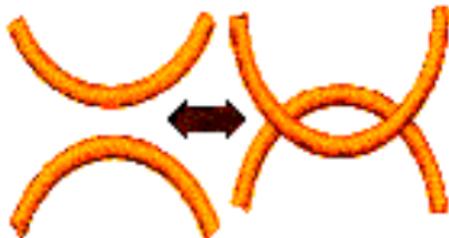
# Tait, Kirkman y Little

Aproximadamente en el año 1890 estos 3 matemáticos trabajaron en la extensión de la tabla de nudos, logrando completarla a los nudos de hasta 10 cruces (465 nudos).



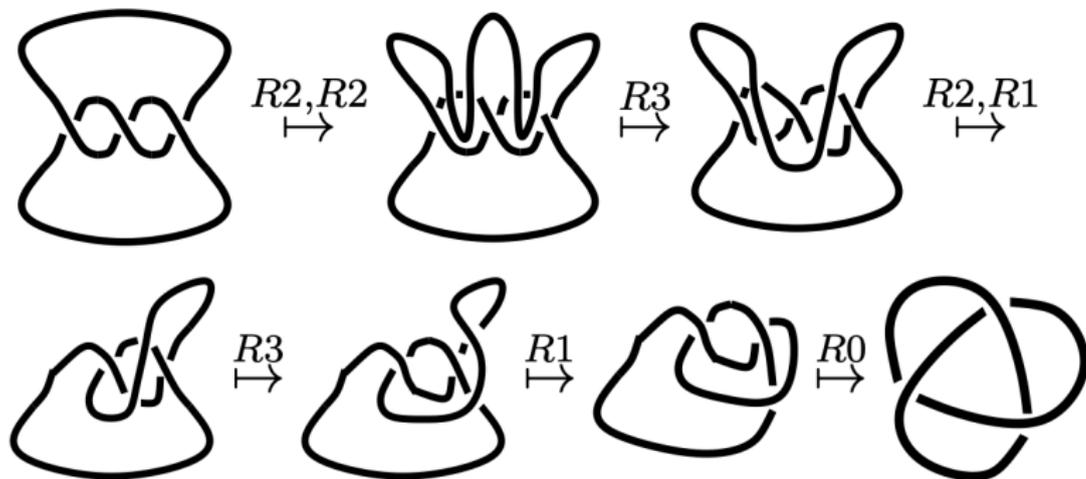
## Reidemeister, 1927

Dos nudos son iguales si y solo si, es posible llevar un diagrama en el otro mediante un número finito de movidas de Reidemeister.



Reidemeister completó la tabla de nudos hasta los nudos de 9 cruces en 1932.

## Ejemplo



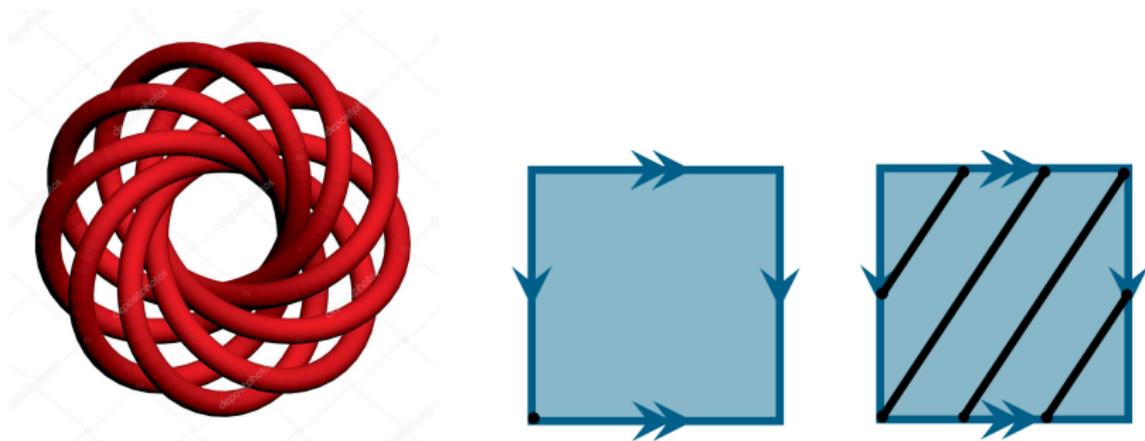
Con el teorema de Reidemeister en teoría podemos determinar cuando dos nudos son el mismo, sin embargo teniendo dos diagramas del mismo nudo, no sabemos cuántas movidas son necesarias ni en qué orden, para llevar un diagrama a otro.

## Teorema

*Dos nudos son equivalentes si y solo si, sus complementos son homeomorfos bajo un homeomorfismo que preserva la orientación.*

# Familias importantes de nudos

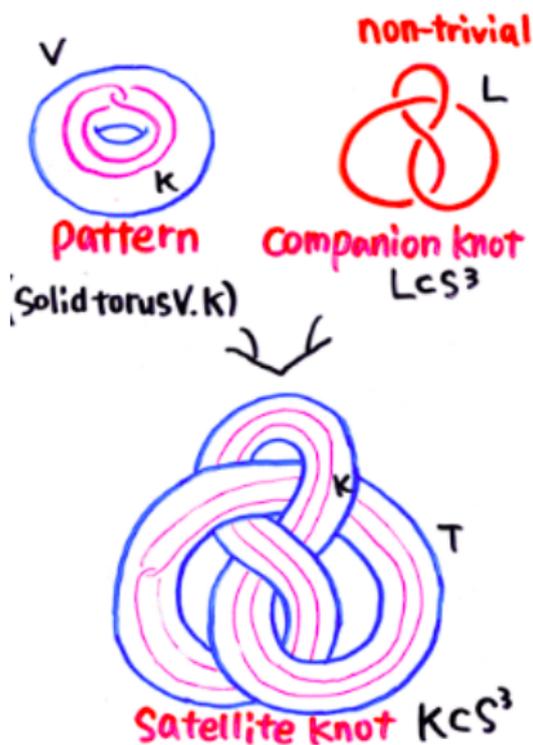
## Nudos toroidales $T(p, q)$



$T^2 \cong S^1 \times S^1$ , entonces  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tiene generadores  $\langle 0, 1 \rangle$  (meridiano) y  $\langle 1, 0 \rangle$  (longitud). Así, un nudo en  $T^2$  se representa por una clase  $\langle p, q \rangle$  donde  $\text{MCD}(p, q) = 1$ .

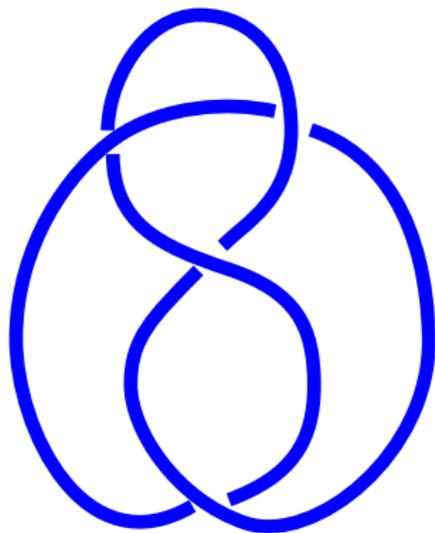
# Familias importantes de nudos

## Nudos satélite



# Familias importantes de nudos

## Nudos hiperbólicos

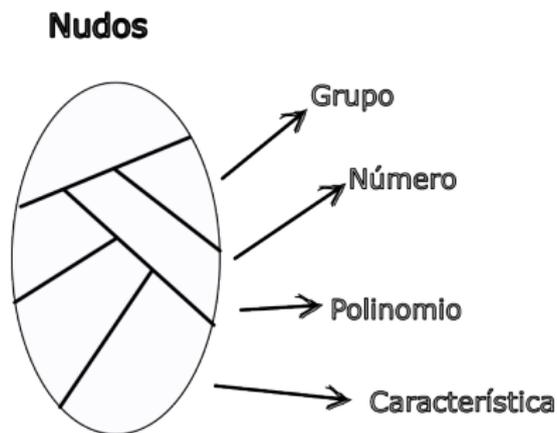


Su complemento admite una estructura geométrica hiperbólica de curvatura constante  $-1$ .

La mayoría de los nudos que aparecen en las tablas, son hiperbólicos.

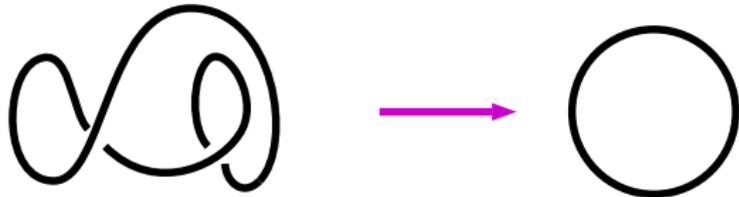
# Invariantes de nudos

“Propiedad” que se asocia a un nudo y que se preserva bajo equivalencia.

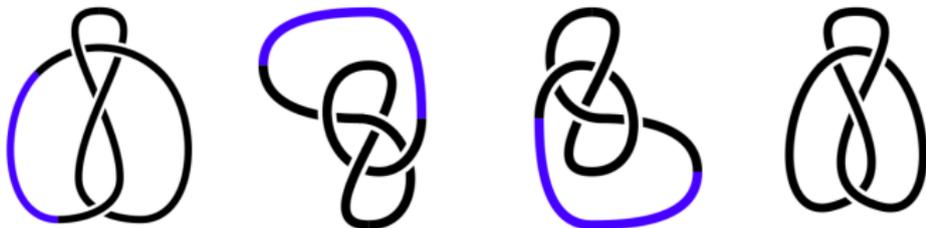


# Ejemplos de invariantes de nudos

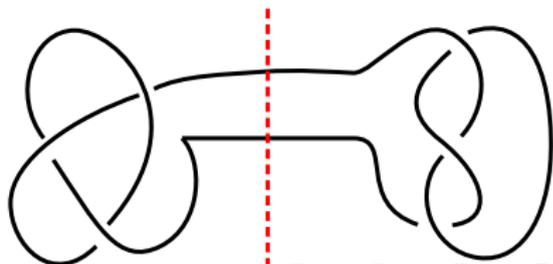
- ▶ Mínimo número de cruces.



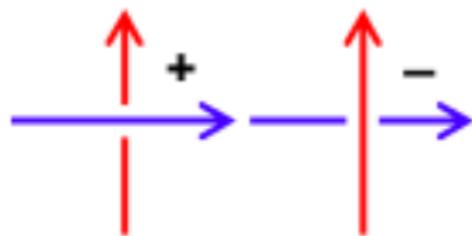
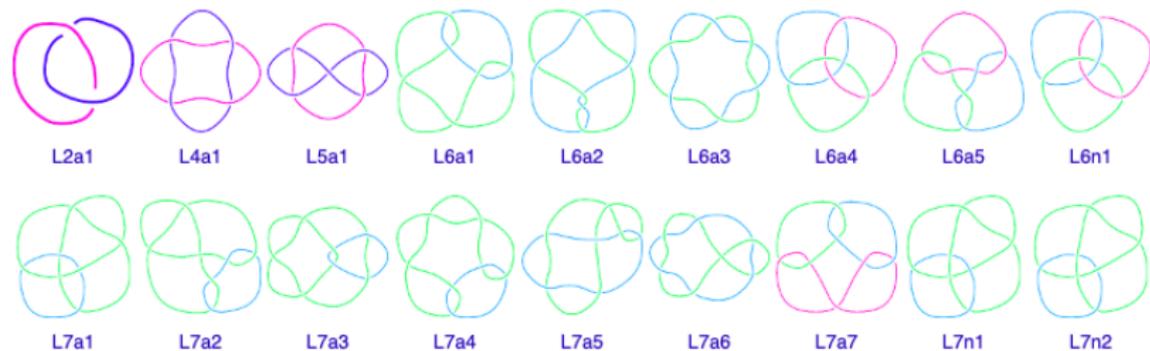
- ▶ Ser anfiquiral ó quiral.



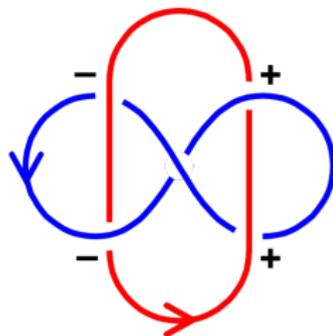
- ▶ Ser primo ó compuesto.



# Enlaces y número de enlace

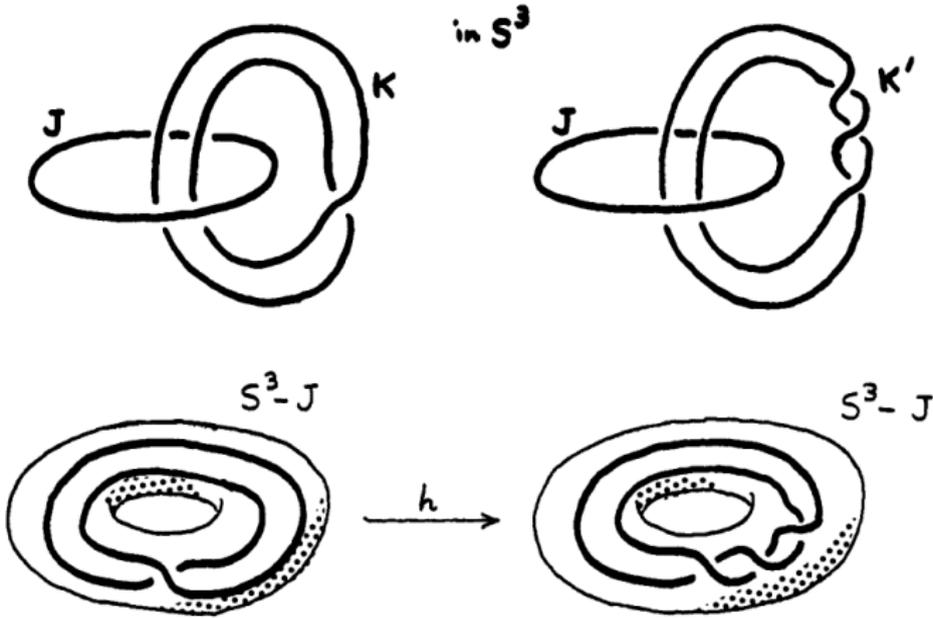


$lk(L) = \frac{1}{2} \sum$  signos de los cruces.



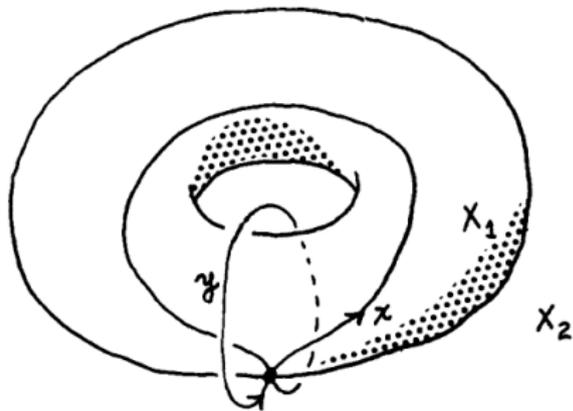
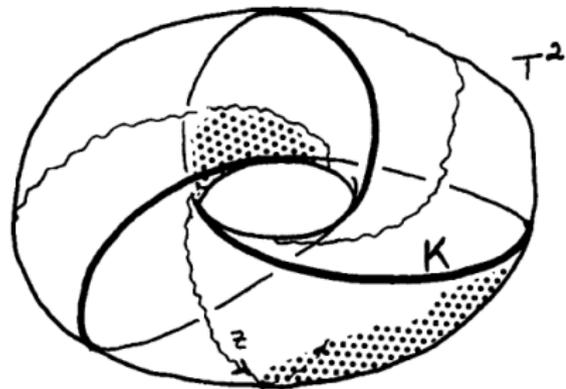
$lk(\text{Whitehead}) = 0$

El Teorema de Gordon y Luecke no es cierto para enlaces.



# Grupo de un nudo.

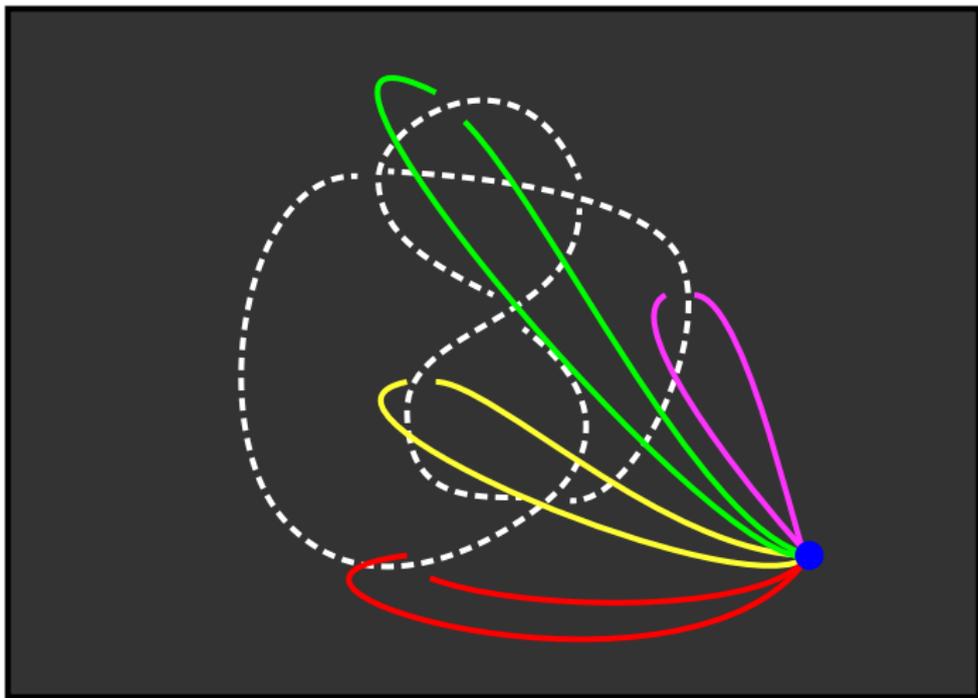
$$\pi_1(S^3 \setminus K)$$



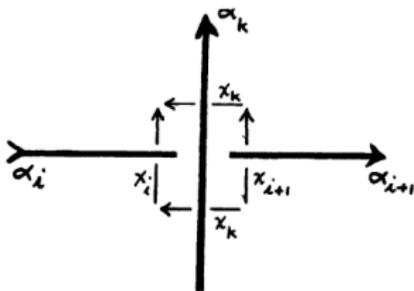
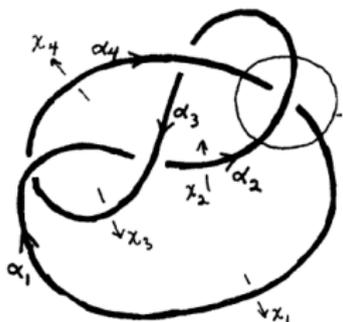
$$\pi_1(T(p, q)) = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$$

# Grupo de un nudo

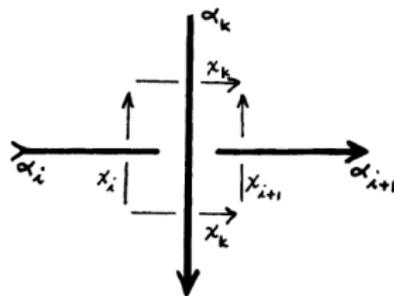
$$\pi_1(S^3 \setminus K)$$



# Algoritmo de Wirtinger



$$r_1 : \quad x_k x_i = x_{i+1} x_k$$

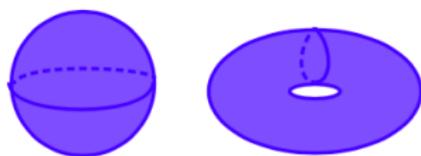


$$x_i x_k = x_k x_{i+1}$$

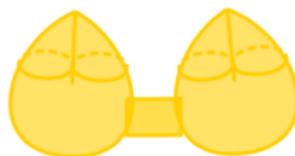
$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_n \rangle.$$

# Superficies.

Orientables



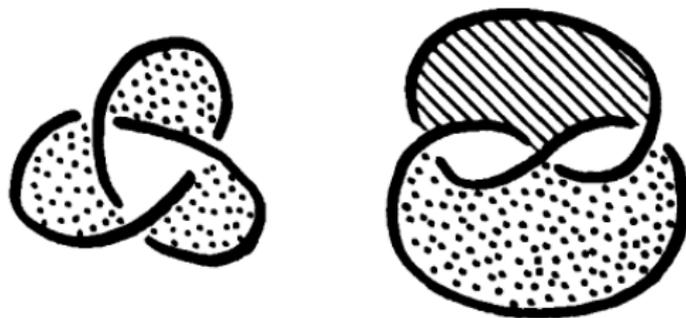
No orientables



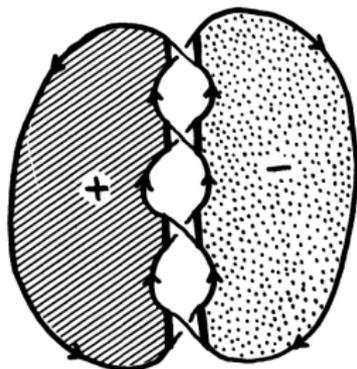
Teorema (Dehn y Heegaard, 1907)

*Toda superficie cerrada y conexa es homeomorfa a  $S^2$ , a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos.*

## Superficies con frontera un nudo o enlace.

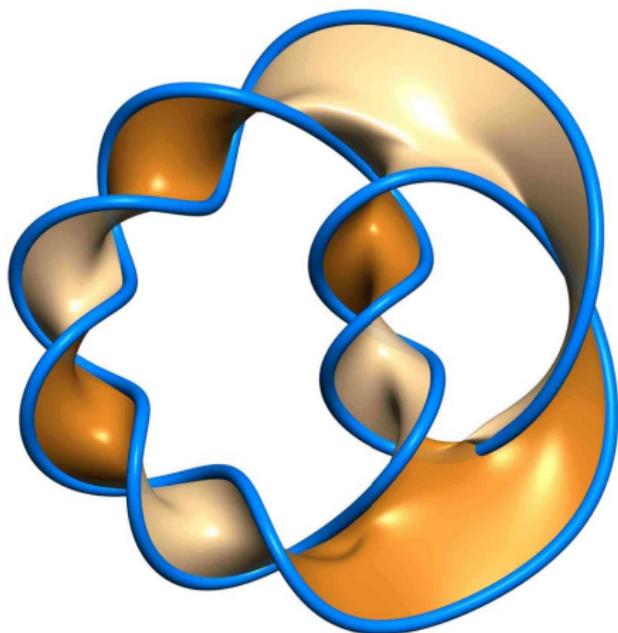


En 1934 Seifert encontró un algoritmo mediante el cual es posible encontrar superficies orientables cuya frontera sea un nudo dado.



## Superficies de Seifert.

Una superficie orientable que tiene como frontera un nudo se llama *superficie de Seifert* del nudo.



El mínimo de los géneros sobre todas las posibles superficies de Seifert para un nudo se llama *el género del nudo*.

# Género de un nudo

El género es un invariante de nudos y tiene las siguientes propiedades:

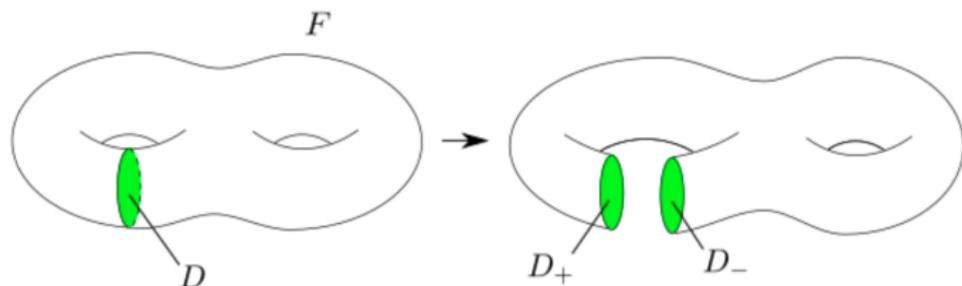
- ▶ El género de un nudo es cero si, y solo si el nudo es trivial.
- ▶ El género es aditivo en sumas conexas de nudos.
- ▶ Si el género de un nudo es 1, entonces el nudo es primo.

## Superficies en exteriores de nudos

Decimos que una superficie  $S$  está *propriadamente encajada* en el exterior de un nudo,  $E(K) = S^3 \setminus \mathcal{N}^o(K)$  si  $S \cap \partial E(K) = \partial S$ .

Un **disco de compresión** para  $S$  es un disco  $D \subset M$  con  $\partial D = D \cap S$ , tal que  $\partial D$  no es frontera de un disco en  $S$ . Cuando existe un disco de compresión para  $S$  diremos que es **compresible** y de otra forma será **incompresible**.

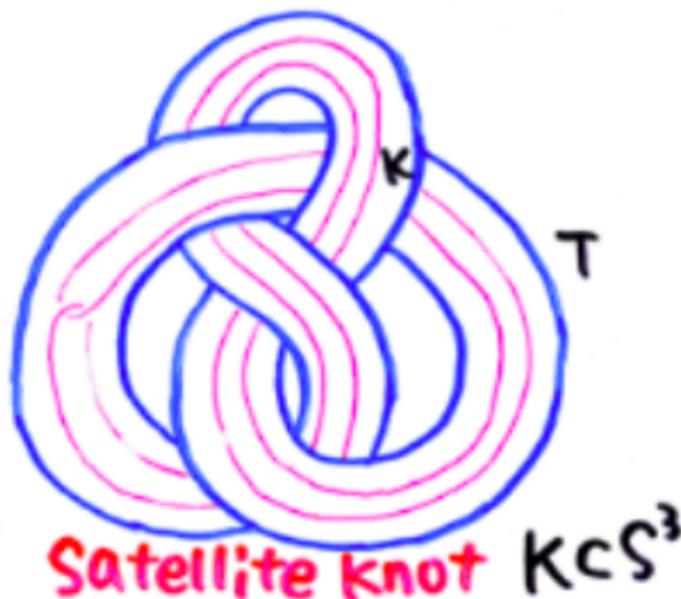
Si  $S$  es compresible, podemos realizar una compresión que vuelve a  $S$  una superficie más sencilla:



(**Lema de Dehn**) Una superficie  $S \subset M$  es incompresible si, y sólo si el mapeo inducido por la inclusión  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectivo.

## Superficies en exteriores de nudos

Los nudos satélites tienen un toro incompresible en su exterior.



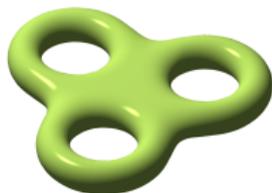
# 3 variedades

Ejemplos:

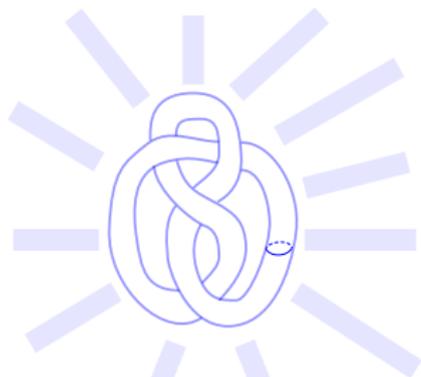
Toro sólido.



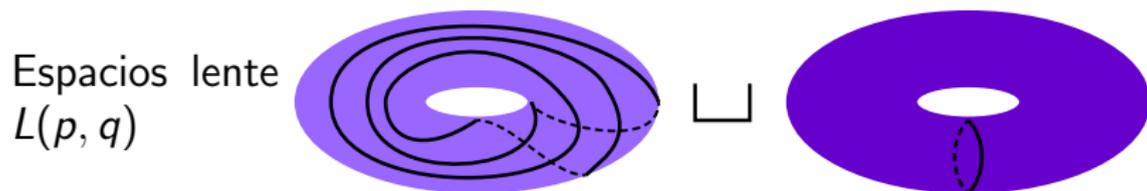
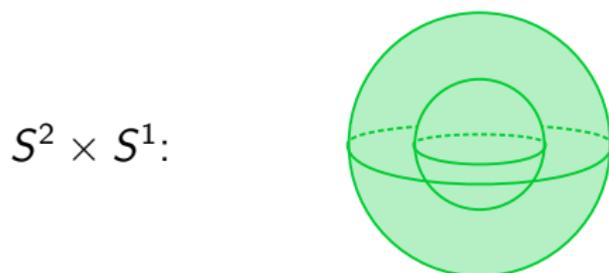
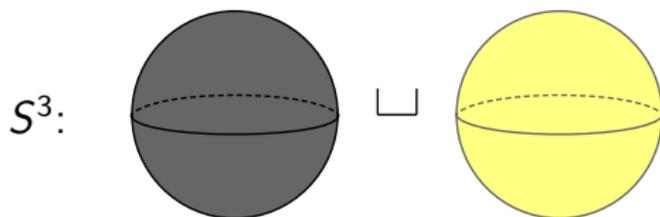
Cubos con asas.



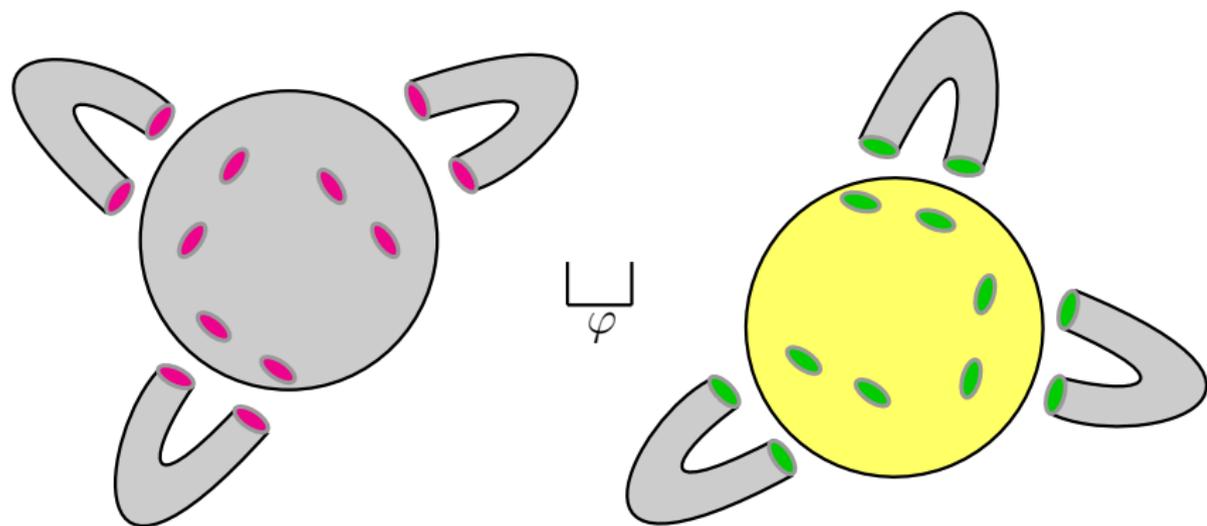
Exteriores de nudos / enlaces.



# Ejemplos de 3-variedades compactas, conexas y sin frontera.



# Descomposiciones de Heegaard

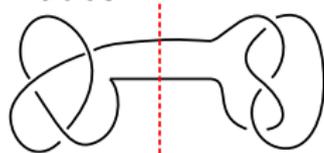


Teorema (Moise, 1952)

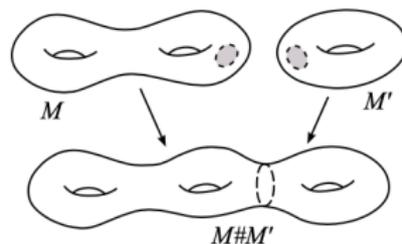
*Toda 3-variedad compacta, orientable y sin frontera admite una descomposición de Heegaard.*

# 3 variedades primas

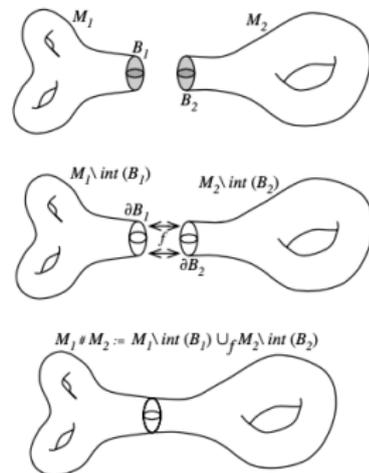
Nudos



Superficies



3-variedades



Decimos que una 3-variedad es **prima** si no puede descomponerse como suma conexa de 3 variedades distintas a  $S^3$ .

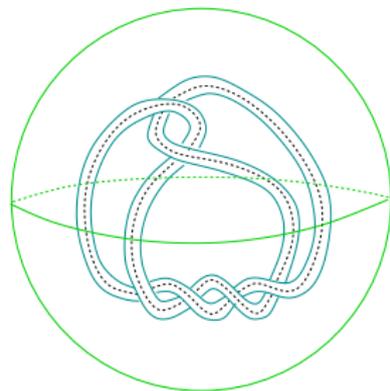
**Teorema (Kneser, Milnor)**

*Toda 3 variedad compacta, orientable y sin frontera tiene una única descomposición como suma conexa de variedades primas.*

## 3 variedades irreducibles

Decimos que una 3-variedad  $M$  es **irreducible** si toda esfera en  $M$  es la frontera de una bola.

Ejemplo: El exterior de un nudo es irreducible



### Teorema

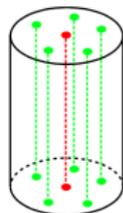
La única 3 variedad prima que no es irreducible es  $S^2 \times S^1$ .

# Espacios Fibrados de Seifert

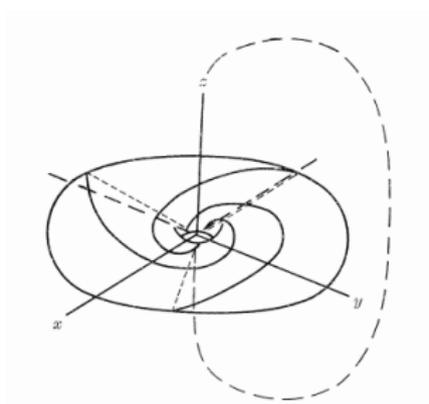
Un **espacio fibrado de Seifert** se ve como la unión de círculos disjuntos (llamados fibras), en el que cada fibra tiene una vecindad tubular homeomorfa a un **toro sólido fibrado**:

$$\sqcup_{x \in D^2} \{x\} \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\rho(x), 1)$$

$\rho: D^2 \rightarrow D^2$  es una rotación en un ángulo  $2\pi p/q$  para alguna pareja de enteros  $p, q$  primos relativos entre sí



**Ejemplo.** El exterior de un nudo toroidal es un espacio fibrado de Seifert.



# Los espacios fibrados de Seifert ya están clasificados!

Sea  $S$  el espacio topológico obtenido de  $M$  (espacio fibrado de Seifert) al identificar cada círculo en un punto,  $M \rightarrow S$ . Se puede probar que  $S$  es una superficie compacta, conexa y con frontera (posiblemente vacía).

Usamos la notación  $M = (S, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$ .

## Teorema

*Dos espacios fibrados de Seifert,*

$$(S, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h)) \text{ y } (S', (p'_1, q'_1), \dots, (p'_{h'}, q'_{h'}))$$

*con  $p_i, p'_i \geq 2$  son isomorfos (preservando orientación), si y sólo si  $S = S'$ ,  $h = h'$ ,  $\sum_{i=1}^h \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{h'} \frac{q'_i}{p'_i}$  y salvo reordenamiento,  $p_i = p'_i$  y  $q_i \equiv q'_i \pmod{p_i}$  para toda  $i$ .*

## Descomposición de 3-variedades por toros

Se dice que una 3 variedad  $M$  es **atoroidal** si todo toro incompresible encajado en  $M$  se puede deformar a un toro en  $\partial M$ .

Sea  $M$  una 3-variedad orientable, irreducible con frontera (posiblemente vacía) una unión de toros. Sea

$S = T_1 \sqcup T_2 \sqcup \dots \sqcup T_k$  una unión de toros esenciales disjuntos de  $T_i \subset \text{int}(M)$ . Decimos que  $S$  es una **descomposición en toros** de  $M$  si estos descomponen a  $M$  en bloques que son atoroidales o espacios fibrados de Seifert.

Una descomposición en toros es **minimal** si ningún subconjunto propio de  $S$  es una descomposición en toros de  $M$ .

**Teorema (Jaco, Shalen, Johanson, 1970)**

*Sea  $M$  una 3-variedad orientable, irreducible con frontera (posiblemente vacía) una unión de toros. Existe una descomposición minimal en toros de  $M$  y es única salvo isotopía.*

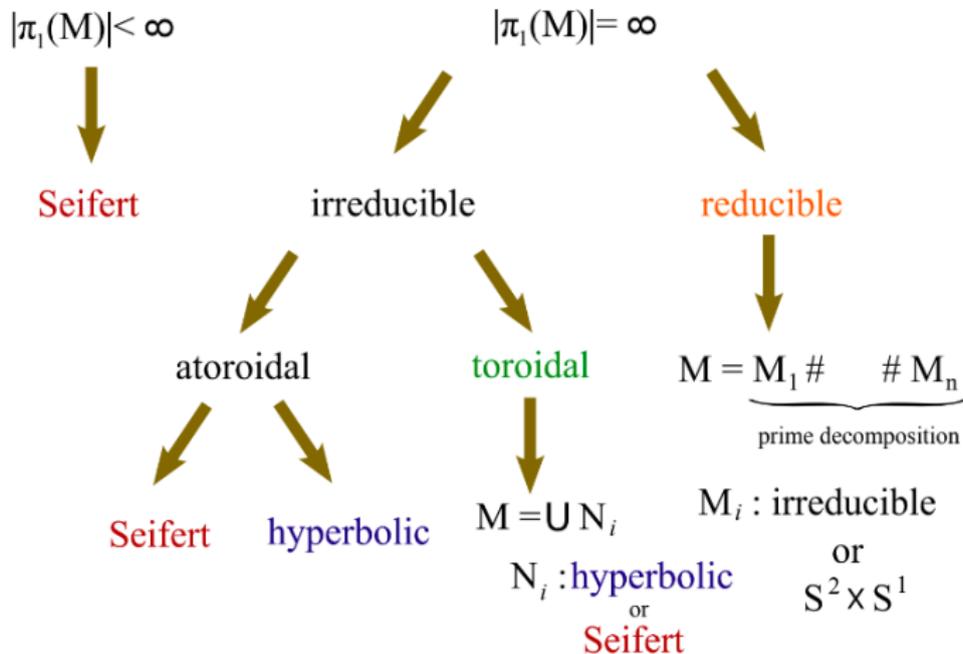
## Teorema de geometrización de 3 variedades

Planteado por Thurston en 1982 y probado por Perelman en 2003: “Cada uno de los bloques en la descomposición por esferas y toros de una variedad es geométrica”. Hay solamente 8 modelos geométricos de variedades de dimensión 3 (variedades Riemannianas, completas, simplemente conexas, homogéneas):

$$S^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil, Sol, \widetilde{SL}_2$$

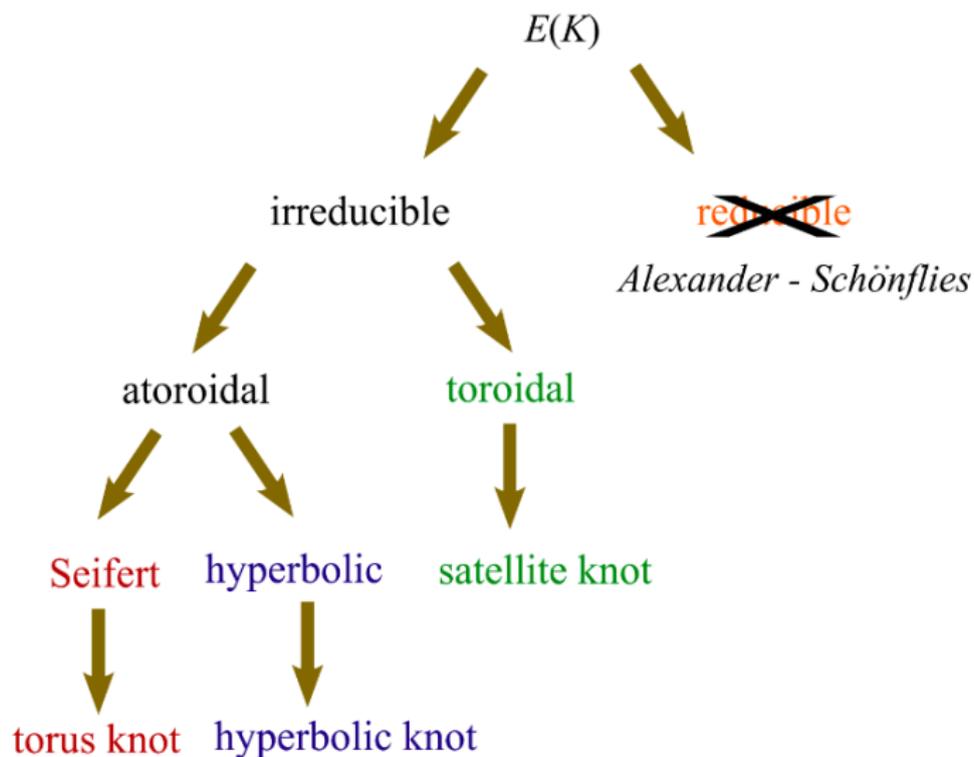
Seis de las ocho posibles geometrías son realizadas por espacios fibrados de Seifert. De las dos restantes (*Sol* y  $\mathbb{H}^3$ ), se conoce las variedades que realizan la geometría *Sol*. Las variedades no clasificadas aún son las hiperbólicas.

# Clasificación de 3 variedades



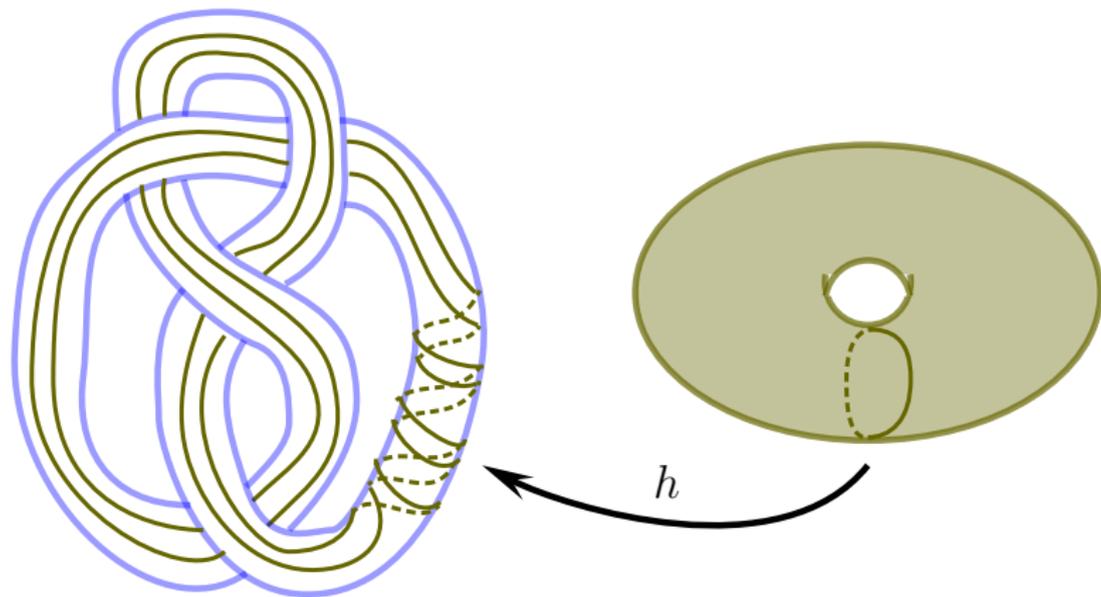
Una 3-variedad cerrada es hiperbólica si no es un espacio fibrado de Seifert y no contiene esferas o toros esenciales.

# Clasificación de nudos



Un nudo es hiperbólico si su exterior no contiene anillos o toros esenciales.

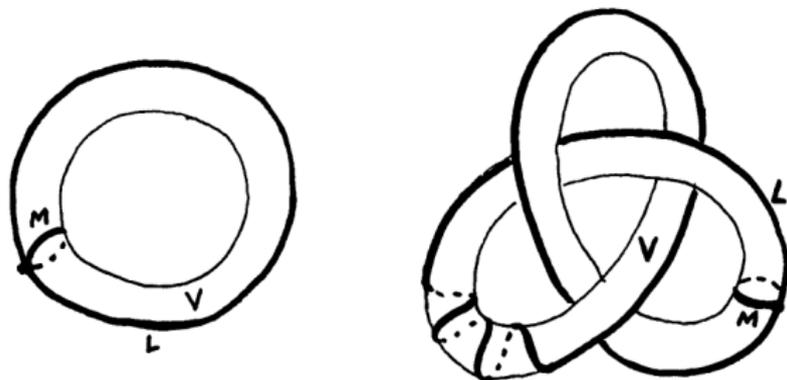
# Llenado de Dehn



## Longitud preferente

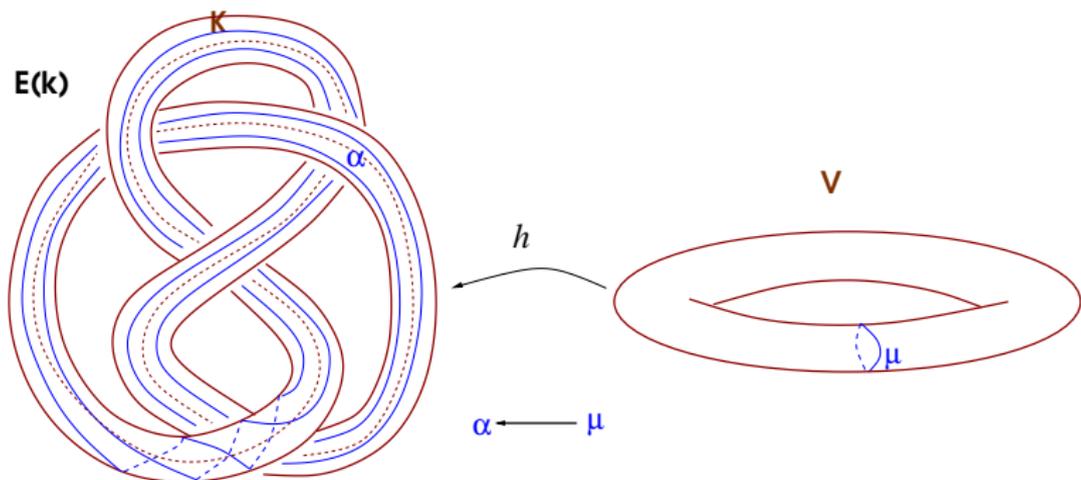
Notemos que  $H_1(E(X)) = \mathbb{Z}$ .

$\partial E(K)$  es un toro, por lo que podemos parametrizar las curvas cerradas simples en términos de una base de  $\pi_1(\partial E(K))$ . Elegimos como base un meridiano  $M$  de  $\mathcal{N}(K)$  y la longitud  $L$  tal que  $\ell k(K, L) = 0$ . Dicha longitud se llama **longitud preferente** y está caracterizada por ser homológicamente nula en  $E(K)$ .



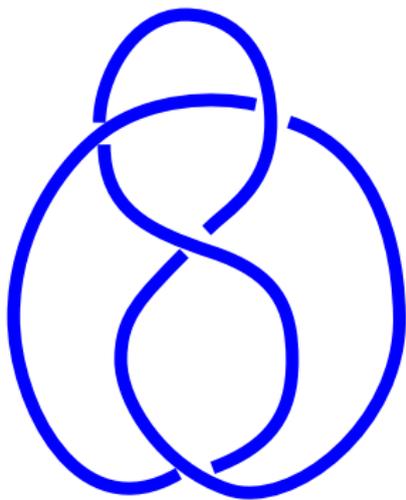
## Pendientes de cirugía

Entonces una curva  $\alpha$  se escribe como  $[\alpha] = p[M] + q[L]$ , donde  $p, q$  son enteros primos relativos o cero. De esta manera, podemos pensar en  $[\alpha]$  como la fracción  $p/q$ , siendo posiblemente  $1/0$ . Al hacer cirugía, la imagen del meridiano en el homeomorfismo de llenado se llama **pendiente de la cirugía**. Denotaremos por  $K(p/q)$  a la 3-variedad obtenida por cirugía de  $K$  con pendiente  $p/q$ .



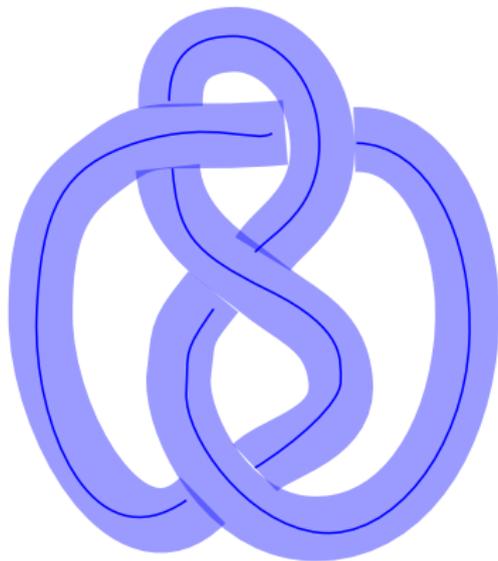
# Cirugía de Nudos.

1. Tomamos un nudo.



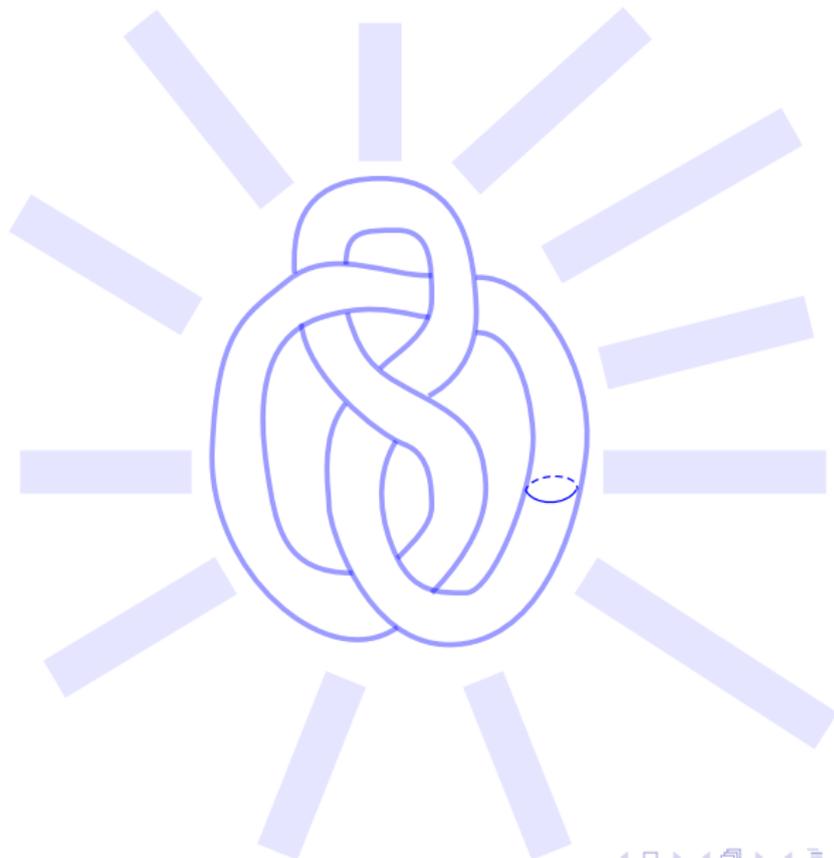
# Cirugía de Nudos.

2. Tomamos una vecindad tubular.



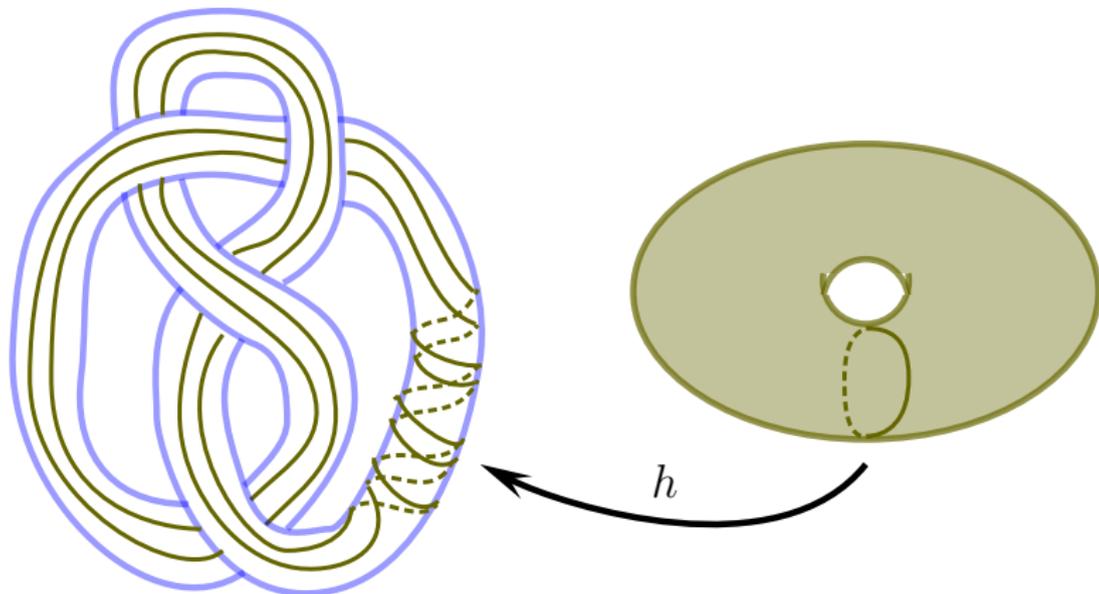
# Cirugía de Nudos.

3. Removemos el interior de la vecindad tubular de  $S^3$ .



# Cirugía de Nudos.

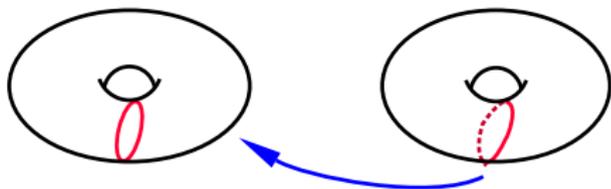
4. Rellenamos con un toro sólido.



# Cirugía de Nudos.

**Ejemplos.** Sea  $U$  el nudo trivial, entonces:

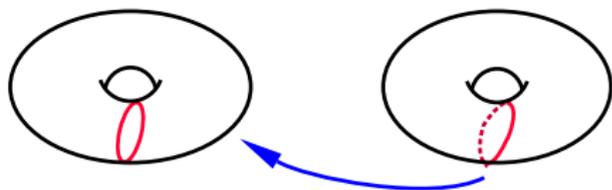
- ▶  $U(1/0) = S^3$



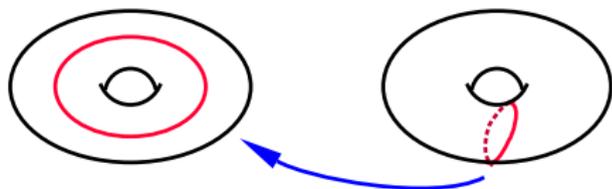
# Cirugía de Nudos.

**Ejemplos.** Sea  $U$  el nudo trivial, entonces:

▶  $U(1/0) = S^3$



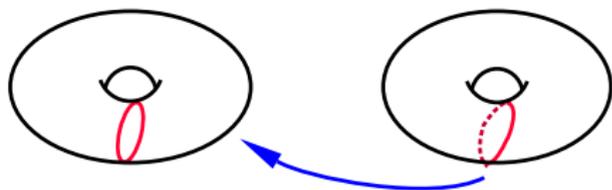
▶  $U(0/1) = S^2 \times S^1$



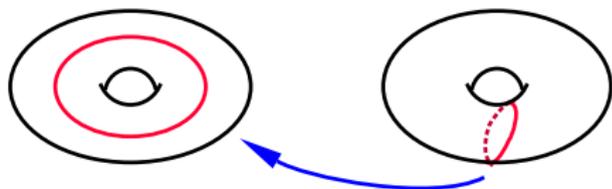
# Cirugía de Nudos.

**Ejemplos.** Sea  $U$  el nudo trivial, entonces:

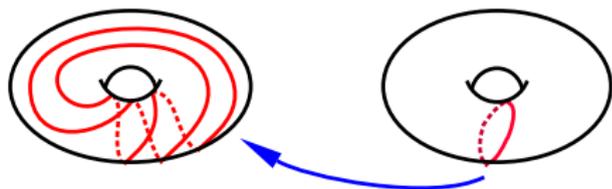
▶  $U(1/0) = S^3$



▶  $U(0/1) = S^2 \times S^1$



▶  $U(p/q) = \text{Espacio Lente } L(p, q)$



## Cirugía de Nudos. Cómo surgió?

La famosa conjetura que Poincaré planteó en 1904, afirma que un espacio tridimensional cerrado y conexo en el cual cualquier lazo es contraíble es homeomorfo a  $S^3$ .

La conjetura de Poincaré permaneció 100 años abierta hasta que el matemático ruso Perelman anunciara su prueba en el 2003.

La conjetura se probó como caso particular de un teorema llamado *el Teorema de Geometrización*.

## Cirugía de Nudos. Cómo surgió?

En la versión original que dió Poincaré a su conjetura (1900), se afirmaba que cualquier 3-variedad  $M$  para la cual  $H_1(M) = 0$  se tiene que  $M$  es homeomorfa a  $S^3$ .

Sin embargo, fue el mismo Poincaré quien encontró en 1904 un contraejemplo a su afirmación, es decir un espacio con  $H_1$  trivial pero no homeomorfo a  $S^3$ , dicho espacio se conoce como la **esfera de Poincaré**.

Debido a ello, Poincaré rephraseó su conjetura en términos de homotopía, en lugar de homología.

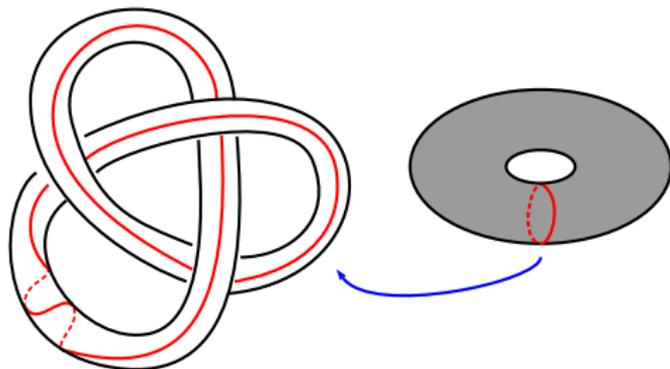
En 1910 el matemático alemán M. Dehn, tratando de encontrar ejemplos que corroboraran ó desmintieran la conjetura de Poincaré inventó la cirugía de nudos.

## Cirugía de Nudos. Cómo surgió?

Con el método de cirugía de Dehn, rápidamente surgieron infinitud de ejemplos de espacios homológicamente triviales (llamados **esferas homológicas**) y no homeomorfos a  $S^3$ .

Observemos que  $H_1(K(p/q)) = \mathbb{Z}_p$ , por lo que  $K(1/q)$  es una esfera homológica para cualquier nudo  $K$  y cualquier  $q$ .

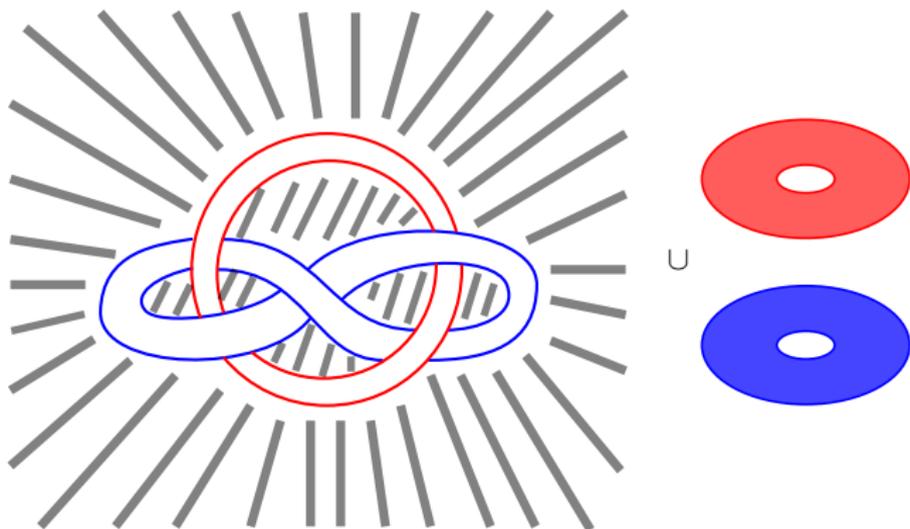
De hecho, la esfera de Poincaré  $Q$ , se obtiene de hacer la siguiente cirugía en el nudo trébol.



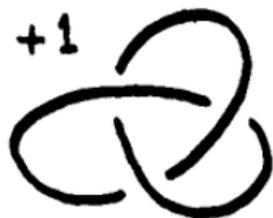
Sin embargo  $\pi_1(Q)$  no es trivial, se puede probar que  $\pi_1(Q)$  es de orden 120.

## Teorema (Lickorish, Wallace, 1960)

*Toda 3-variedad compacta, conexa y sin frontera proviene de hacer cirugía en algún enlace.*



# Cálculos en cirugía



Esfera de Poincaré

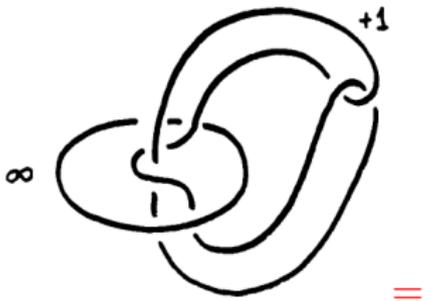
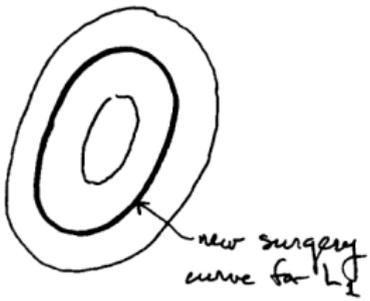
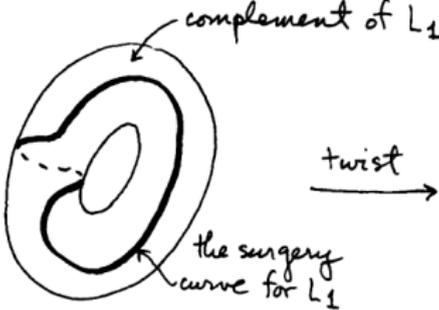


$L(3,4)$



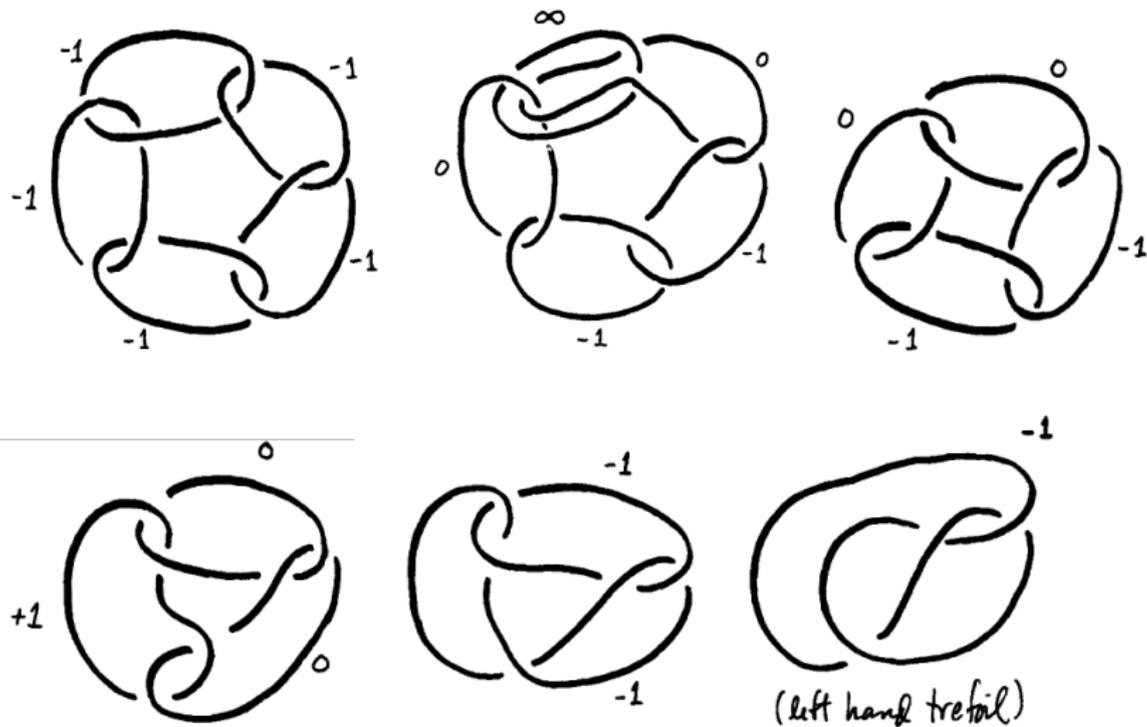
$S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$

# Cálculos en cirugía



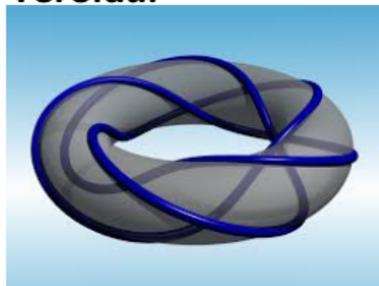
=

# Cálculos en cirugía



# 3 familias de nudos

## Toroidal



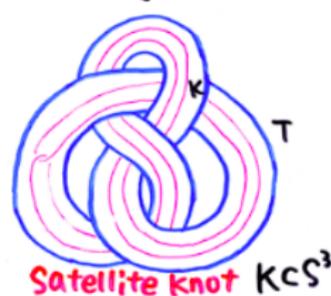
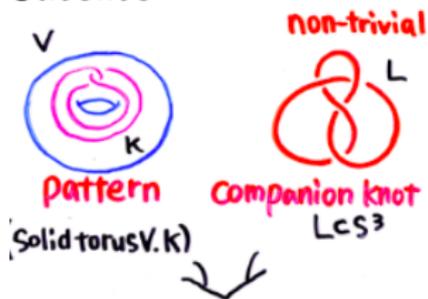
## Hiperbólico.

Su exterior no contiene

- discos esenciales
- anillos esenciales
- esferas esenciales
- toros esenciales



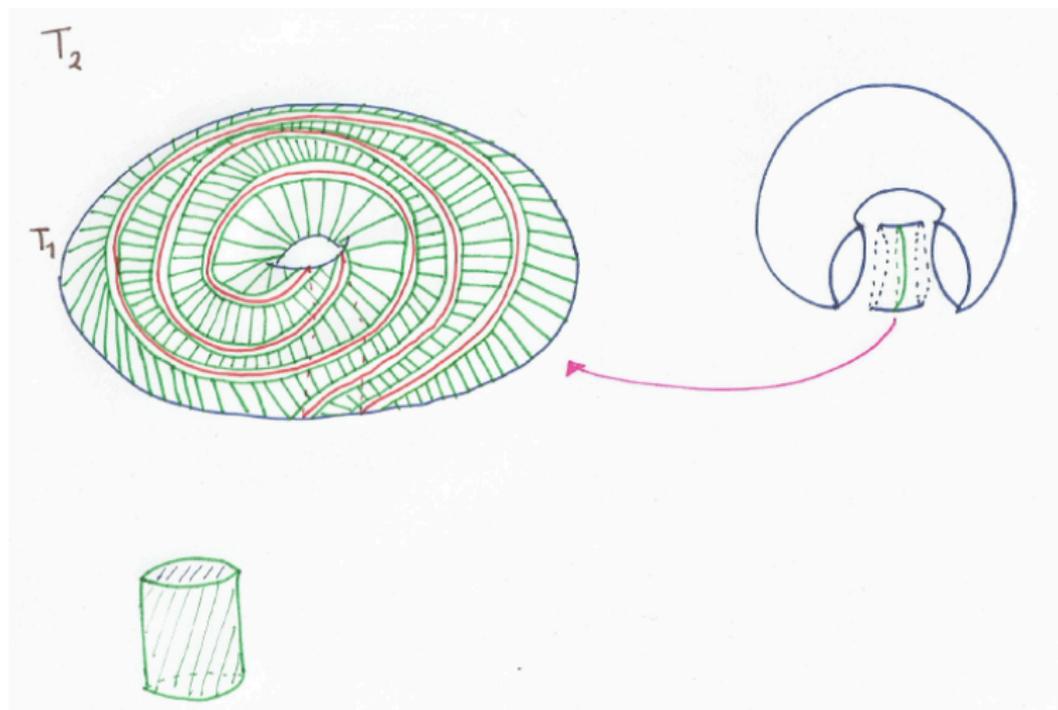
## Satélite





## Cirugía en nudos toroidales.

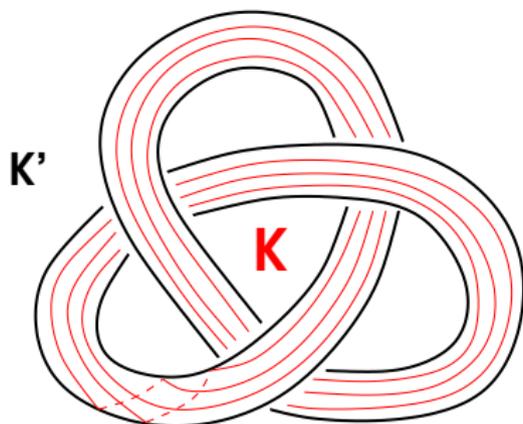
Una cirugía en los nudos toroidales que produce una suma conexas de dos espacios lente.



## Cirugía en nudos satélite

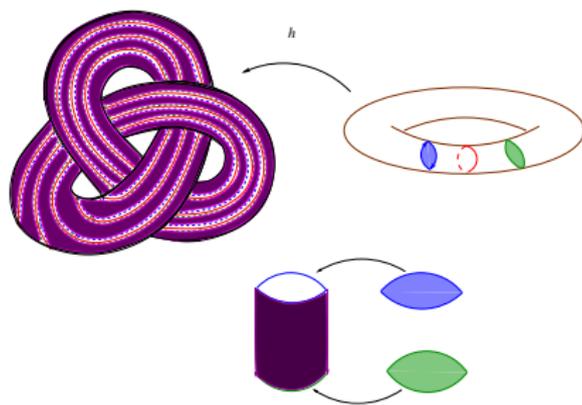
En la mayoría de casos, los nudos satélite preservan su toro incompresible bajo cirugía.

Dentro de la clase de nudos satélite tenemos a los nudos cable.



# Conjetura de los cables

Los nudos cable tienen una cirugía que produce una variedad reducible



Si  $K$  es un  $(p, q)$ -cable de  $K_0$ , entonces  $K(pq) = K_0(p/q) \# L(q, p)$ .  
Se tiene la importante *conjetura de los cables*:

**Conjetura (Fico, H. Short, 1986)**

*Si un nudo no trivial en  $S^3$  produce una variedad reducible al hacer cirugía, entonces el nudo es cable.*

## Cirugía en nudos hiperbólicos

Thurston probó que todas, salvo un número finito de las cirugías en un nudo hiperbólico, resultan ser 3-variedades hiperbólicas.

Son de gran interés las cirugías que no preservan la hiperbolicidad, dichas cirugías se llaman **excepcionales**.

Una forma de describir las cirugías excepcionales de un nudo hiperbólico es acotando los valores de las pendientes, por ejemplo, midiendo la distancia entre pendientes excepcionales

	$S$	$D$	$A$	$T$	$S^3$	$L$
$S$	1	0	2	3	?	1
$D$		1	2	2	*	*
$A$			5	5	*	*
$T$				8	2	?
$S^3$					0	1
$L$						1

## Cirugías excepcionales

Otra opción es acotar el valor de una pendiente excepcional, por ejemplo con una cota que esté en términos del género del nudo.

### Conjetura (Teragaito, 2003)

*Si un nudo hiperbólico  $K \subset S^3$  de género  $g$  tiene una pendiente toroidal  $r$ , entonces  $|r| \leq 4g$ .*

### Teorema (EM,G-T, 2017)

*Sean  $K$  es un nudo hiperbólico de género  $g$  en  $S^3$ ,  $r$  es una pendiente toroidal para  $K$  y  $t$  el mínimo número de intersecciones entre el corazón del toro de cirugía y un toro incompresible, entonces:*

- ▶  $|r| \leq 4g - 3/2$  si  $r$  es semi-entera.
- ▶  $|r| \leq 6g - 3$  si  $t \geq 4$  y  $r$  entera.
- ▶  $|r| \leq 4g + 8$  si  $t = 2$  y  $r$  es entera.

# Cirugías toroidales

Un resultado importante para la prueba del Teorema anterior es el siguiente:

Teorema (EM, 1997, Gordon y Luecke, 2004)

*Un nudo admite una cirugía toroidal semi-entera si, y solo si, el nudo es un nudo de Eudave-Muñoz.*

# Referencias

- ▶ D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, Vol. 7.
- ▶ Gordon, *Dehn Surgery and 3 Manifolds*, Notas del “Advanced School and Conference on Knot Theory and its Applications to Physics and Biology”, 2009.

Gracias!!!