



Instituto de Matemáticas

Nudos, trenzas y simetrías

Bruno Aarón Cisneros de la Cruz

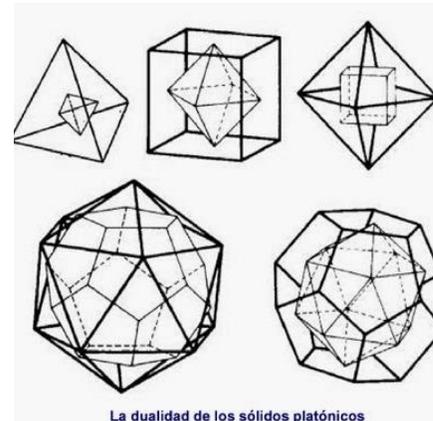
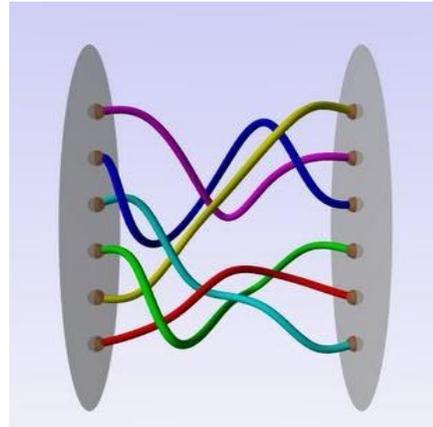
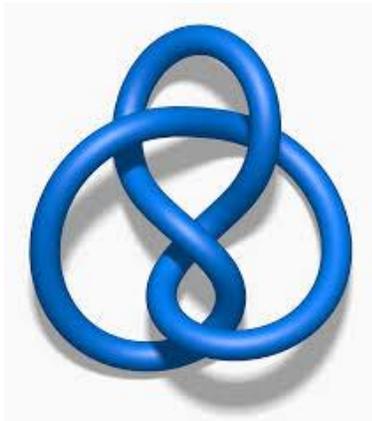
Investigador por México CONAHCYT – UNAM

Instituto de Matemáticas de la UNAM, Oaxaca

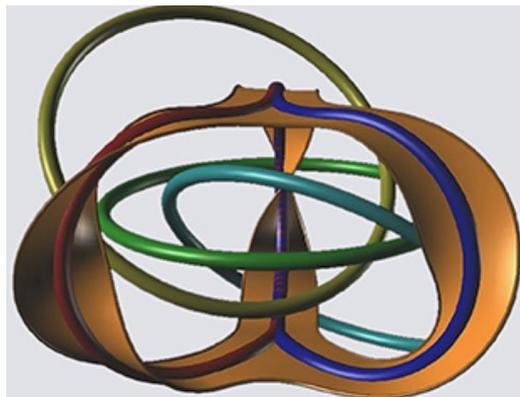
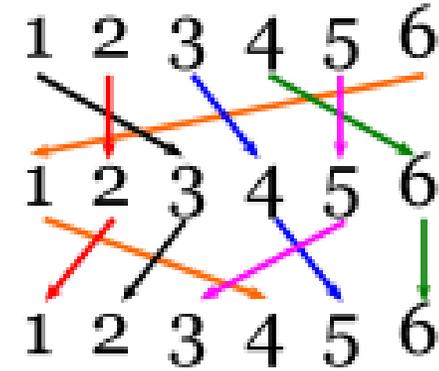


CONAHCYT

CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS



La dualidad de los sólidos platónicos



Escuela

Fico González Acuña de Nudos y 3-Variedades

IMUNAM - Cuernavaca | 4 al 6 de diciembre de 2024

**¿Cómo la teoría geométrica de grupos nos ayuda
a encontrar propiedades topológicas de los
nudos ?**

Hilos trenzados

(Trenzas geométricas)

**Danzas que mueven
el aire**

(Grupo modular de una superficie)

Trenzas

**Puntos en
movimiento**

(Espacios de configuraciones)

Juegos de espejos

(Grupos de Coxeter y Artin)

Trenzas geométricas : hilos trenzados

⊕ Un cubo

⊕ n puntos marcados en la cara izquierda

⊕ n puntos marcados en la cara derecha

⊕ n cuerdas

Trenza geométrica →

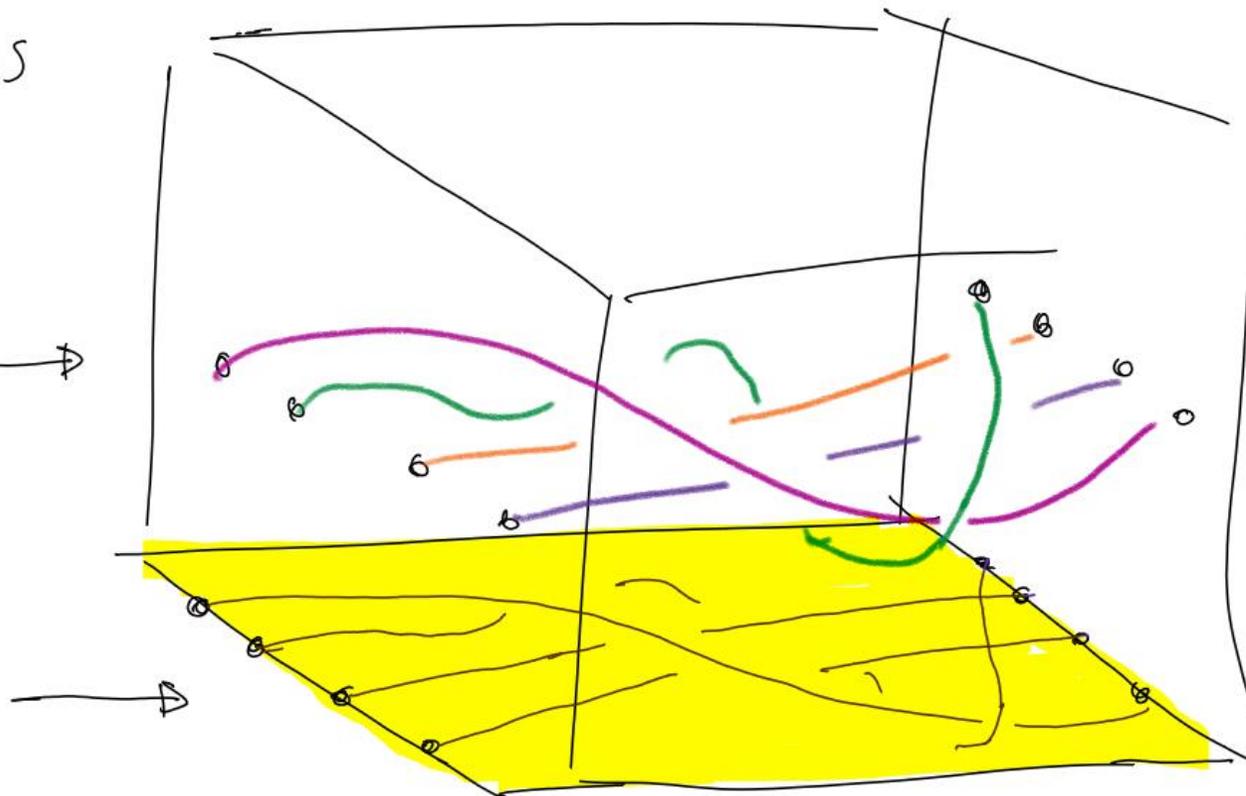


Diagrama de trenza →

Isotopía ambiente

$$H: \mathbb{D}^3 \times I \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(x, t) \mapsto H_t(x)$$

$$H_t \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^3)$$

$$\beta_0 \simeq \beta_1$$

El conjunto de trenzas identificadas por isotopía tiene la estructura de grupo

Recordemos que un grupo

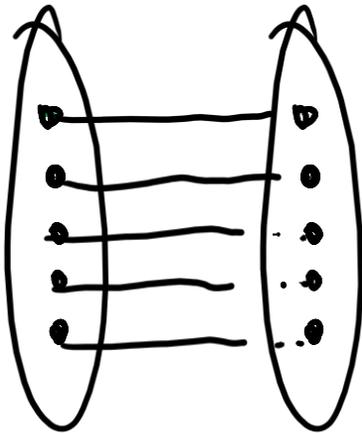
$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

⊕ asociativa $(g h) k = g (h k)$

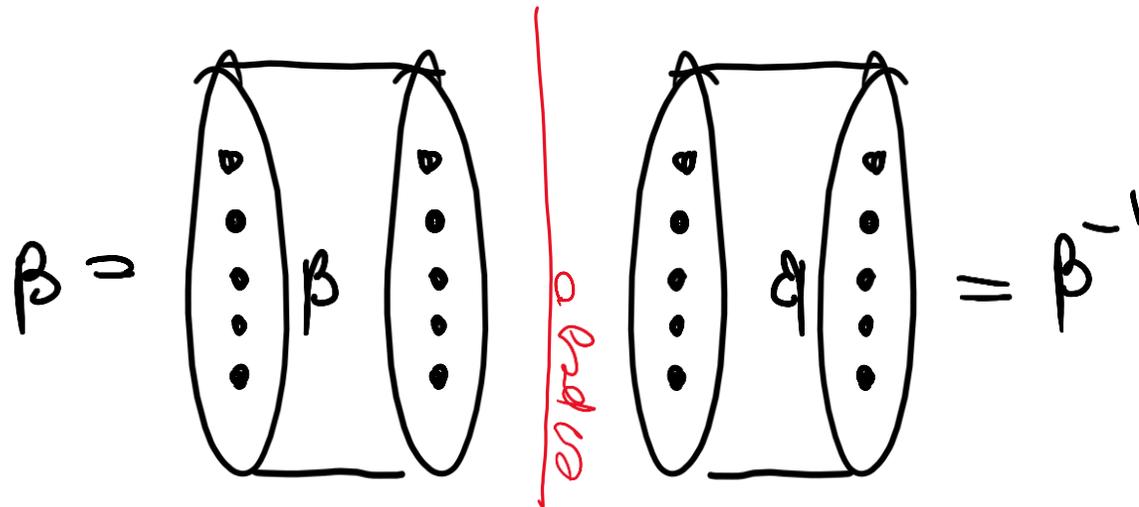
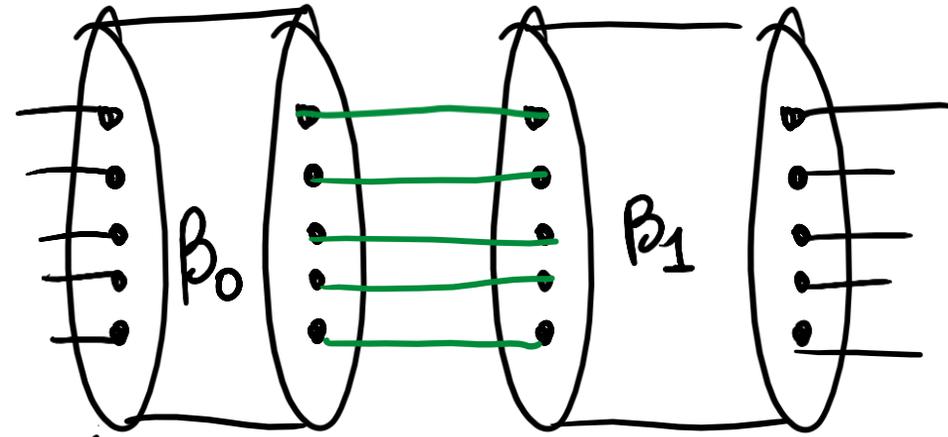
⊕ unidad $g 1 = 1 g$

⊕ inverso $g g^{-1} = 1 = g^{-1} g$

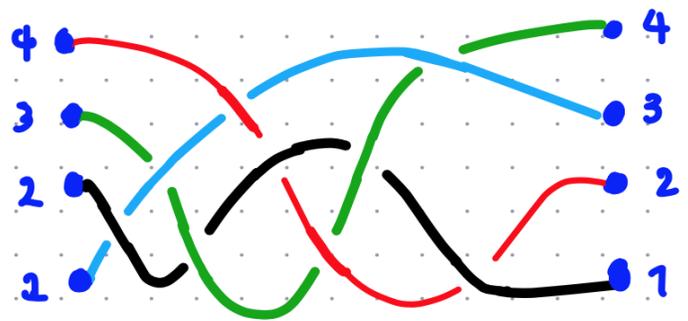
identidad :



Producto de trenzas.

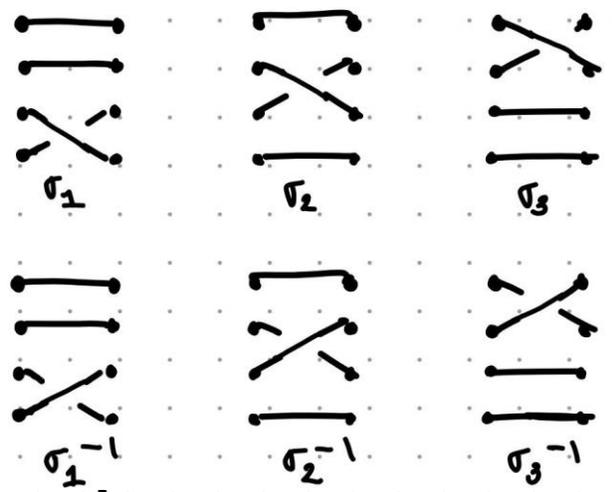


Una presentación del grupo de trenzas



$\sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_4$

Estos diagramas estan determinados por los cruces consecutivos



Artin 1925
Garside 1985

El problema de la palabra:

Encontrar un algoritmo que nos diga cuándo dos palabras representan el mismo elemento

El problema de conjugación:

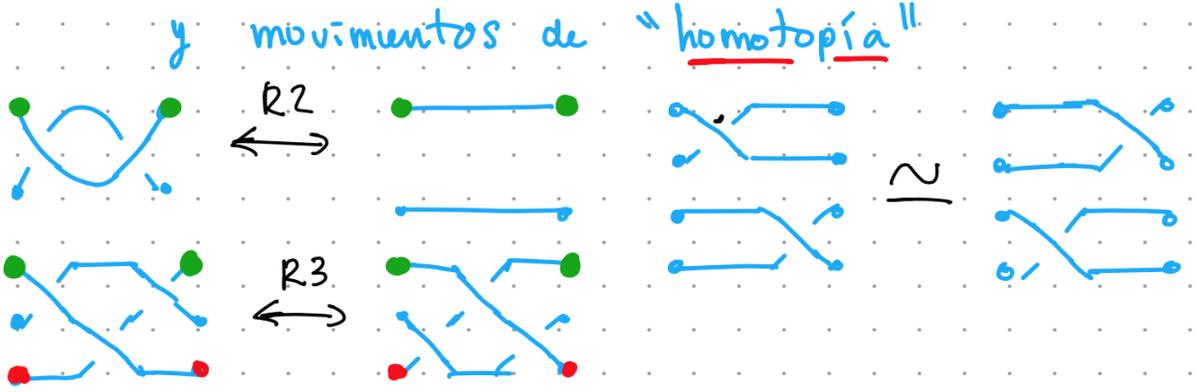
Encontrar un algoritmo que nos diga cuándo dos palabras representan elementos que son conjugados

Garside 1985

El problema de conjugación generalizado:

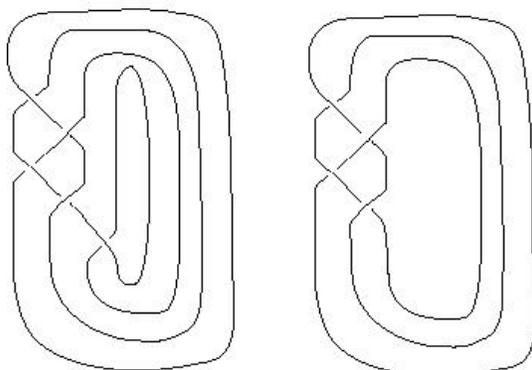
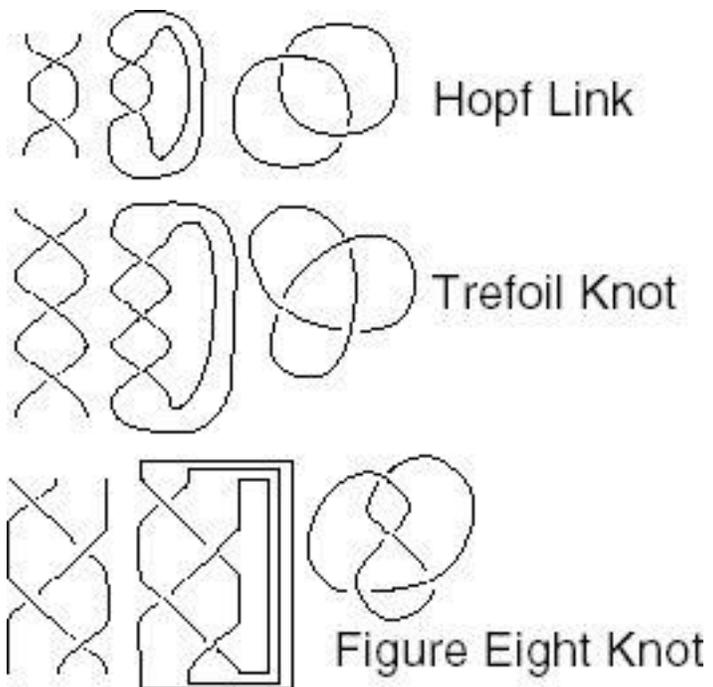
Encontrar un algoritmo que encuentre el elemento que conjuga dos palabras que representan elementos conjugados

González Meneses
Nuno, Gerbhart 2000

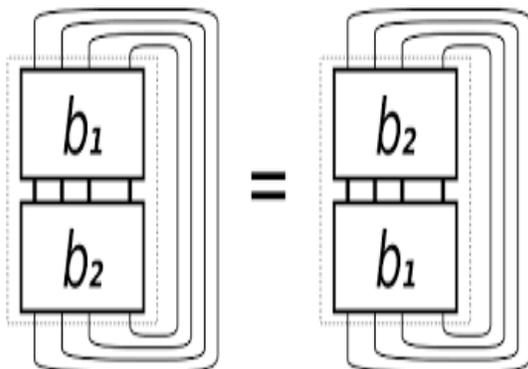


$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \right. \left. \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

De las trenzas a los nudos: Alexander, Markov (Birman)



Estabilización



Conjugación

$$cl : \cup B_n \rightarrow \frac{Nudos}{\cong}$$

T. Alexander. La función clausura es suprayectiva

T. Markov. La clausura de dos trenzas corresponden al mismo nudo si y solo si las trenzas están A y B están relacionadas por una cantidad finita de los siguiente movimientos:

- 1) $A \sim A\sigma_n$ donde $A \in B_n$ (estabilización)
- 2) $AB \sim BA$ (conjugación)
 $ABA^{-1} \sim B$ equivalentemente



El sueño de Emil Artin

$$F : \frac{\{Nudos\}}{\cong} \rightarrow A$$

Un **invariante** es una **FUNCIÓN** del conjunto de nudos – identificados por isotopía a un espacio conocido (generalmente un álgebra)

- *Hasta 1925 se conocían muy pocos invariantes de nudos, solo el último y más fuerte el Polinomio de Alexander.*
- *Emil Artin en 1925 define las trenzas con la esperanza de poder estudiar los nudos desde una perspectiva algebraica.*



Vaughan Jones
1985 – Medalla Fields

Invariantes polinomiales de nudos

$$\cup B_n \rightarrow \cup A_n \rightarrow A$$

π es una representación del grupo en un **álgebra de nudos**

Tr_n es una familia de funciones de las álgebras que es compatible con la representación y cumple:

$$\pi \quad Tr_n$$

$$Tr_n(\alpha\beta) = Tr_n(\beta\alpha) \quad \text{y} \quad Tr_{n+1}(\alpha\sigma_n) = z Tr_n(\alpha)$$

Estas familias de funciones son llamadas **Trazas de Markov**

Después de una reescalaamiento la composición

$$\rho(\alpha) := Tr_{n+1} \circ \pi(\alpha)$$

nos da un invariante polinomial

Knot algebra	Invariant
Temperley–Lieb algebra	Jones polynomial & bracket polynomial
Iwahori–Hecke algebra	HOMFLYPT polynomial
BMW algebra	Kauffman polynomial
B -type & affine Hecke algebras	Lambropoulou invariants
Singular Hecke algebra	Kauffman–Vogel & Paris–Rabenda invariants
Rook algebra	Alexander polynomial

TABLE 1. Examples of knot algebras.

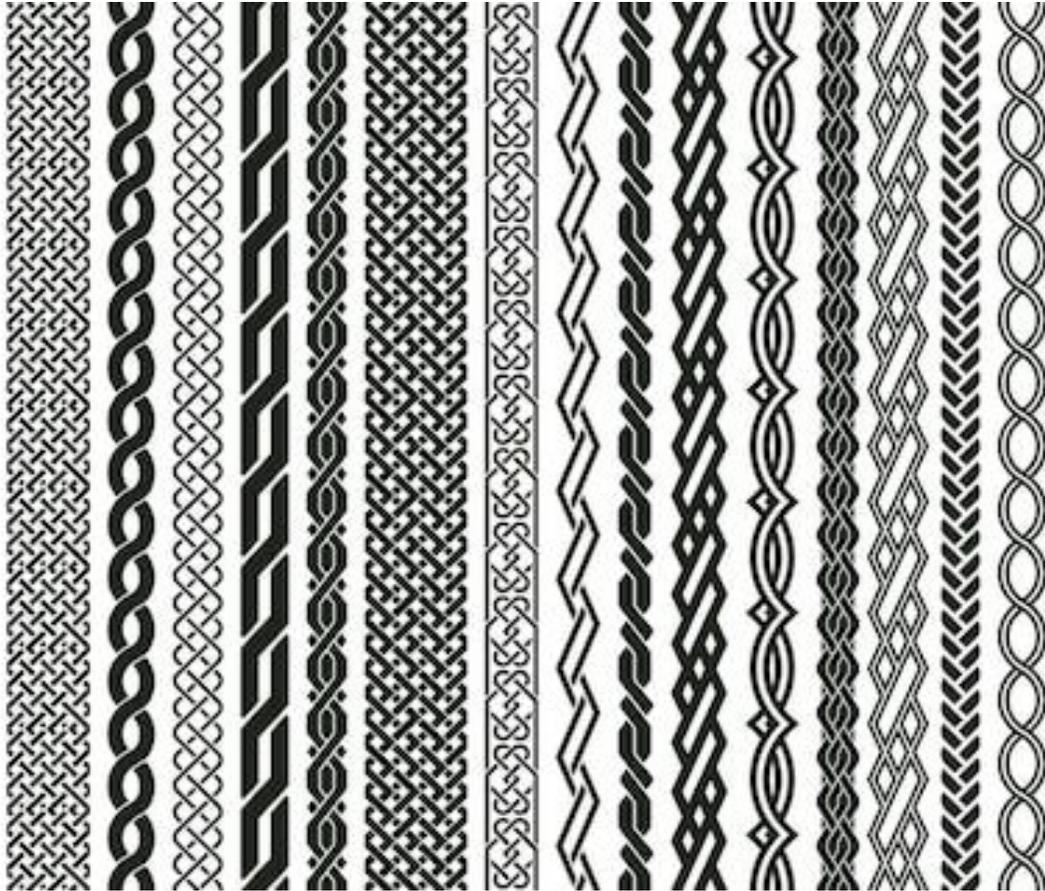
Trenzas como danzas



Santiago Zacatepec Mixe, Oaxaca, mayo 2019

La estela de los danzantes es una trenza con listones tendidos en el corazón de los pueblos

La danza es parte de nuestra cultura



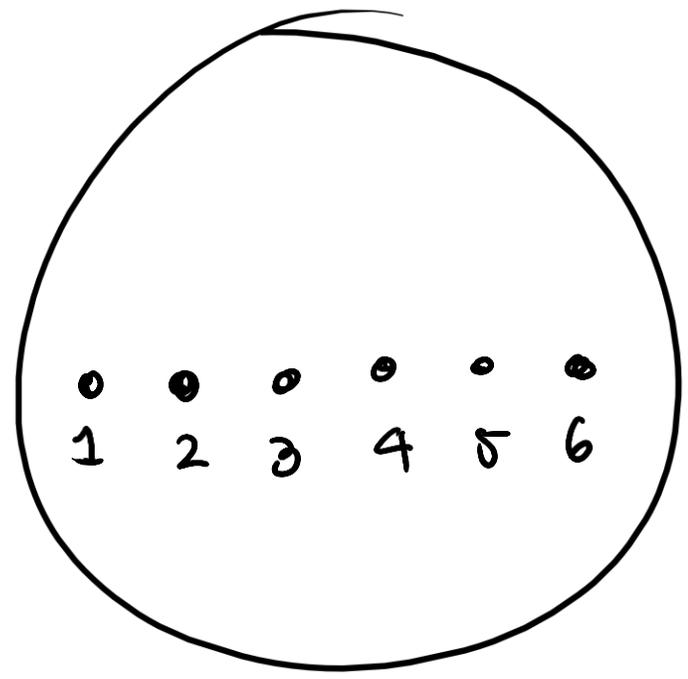
¿Cómo podemos estudiar la danza matemáticamente?

Las trenzas de alguna manera guardan la memoria de la danza

¿Cómo podemos estudiar las trenzas matemáticamente?

El grupo modular del disco con puntos marcados

$$\text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n) = \{ \varphi: \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^2 \mid \varphi(Q_n) = Q_n, \varphi|_{\partial\mathbb{D}^2} = \text{id} \}$$



$$\mathbb{D}_n = (\mathbb{D}^2, Q_n)$$

Podemos deformar los homeomorfismos (como los luzos)

$$H: [0,1] \times \text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n) \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n)$$
$$H_0 = \varphi_0 \quad H_1 = \varphi_1$$

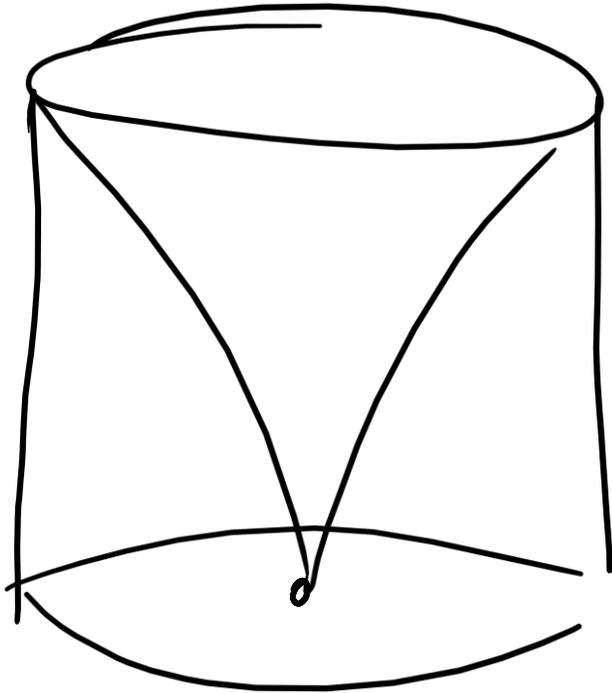
Rel. de \cong \rightarrow ISOTOPIA. $H: \varphi_0 \cong \varphi_1$

$$\text{Mod}(\mathbb{D}_n) = \text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n) / \cong$$

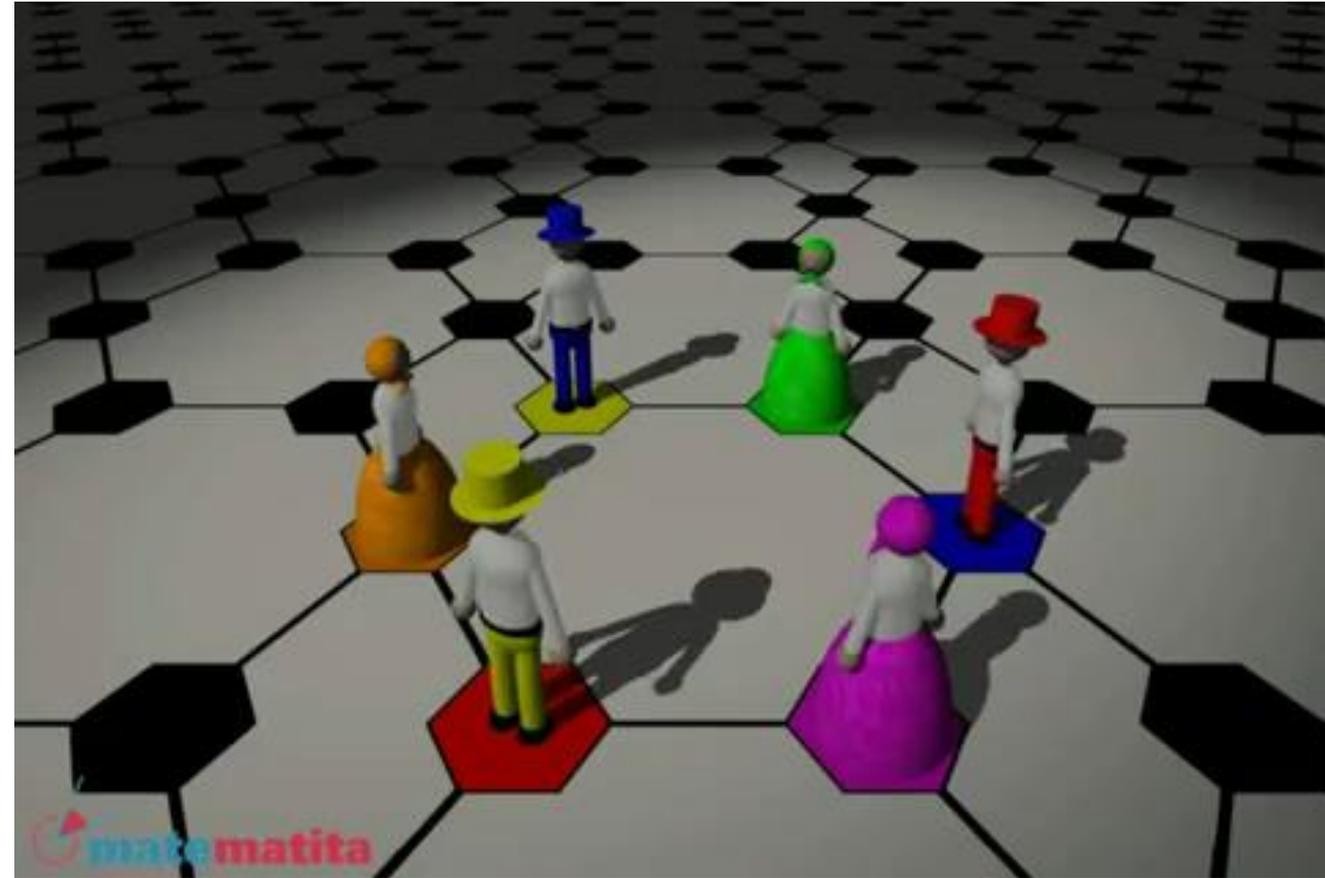


$$\text{Mod}(D_0) = \text{Mod}(D_1) = \text{Is}$$

El truco de Alexander



$$H(t, x) = \begin{cases} (1-t) + \left(\frac{x}{1-t}\right) & |x| \in [0, 1-t] \\ x & |x| \in [t, 1] \end{cases}$$



Videos de Esther Dalvit – visiten su canal de Youtube

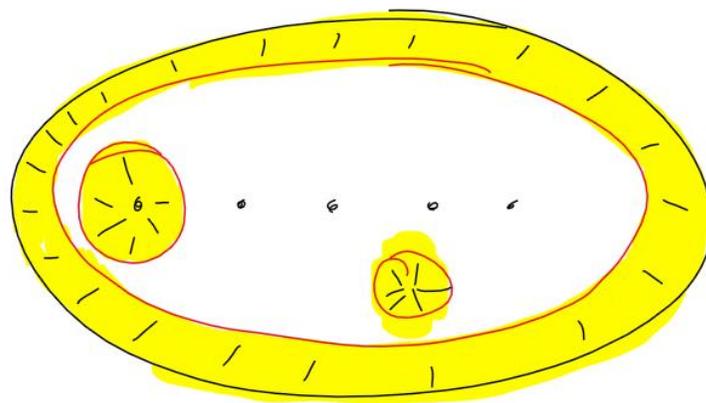
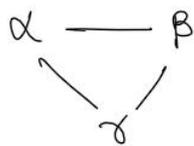
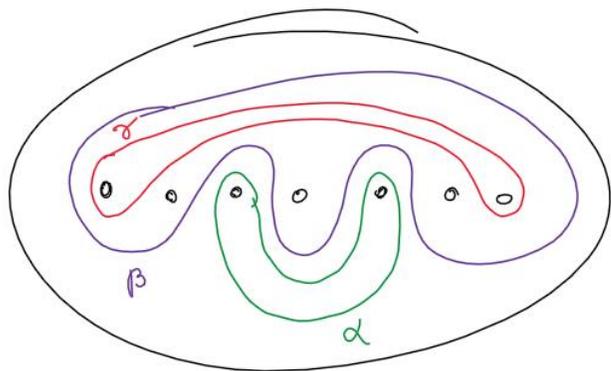
Una trenza es una clase de homotopía

[81 Harvey, 85 Harer, 87 Ivanov]

$C_c(M(D_n))$:

Vértices : curvas esenciales simples,
no isotópicas al borde
no isotópicas a un punto marcado.

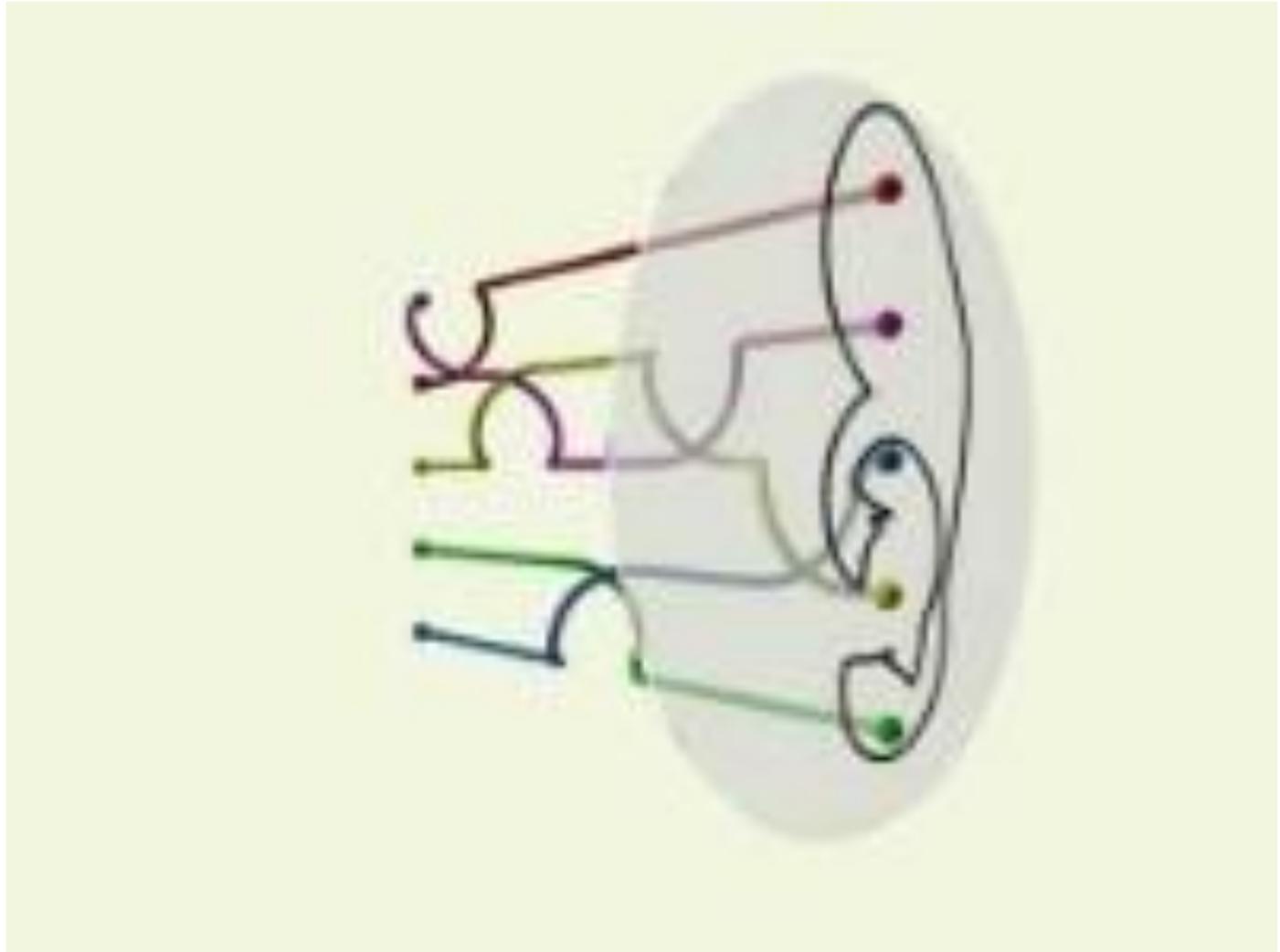
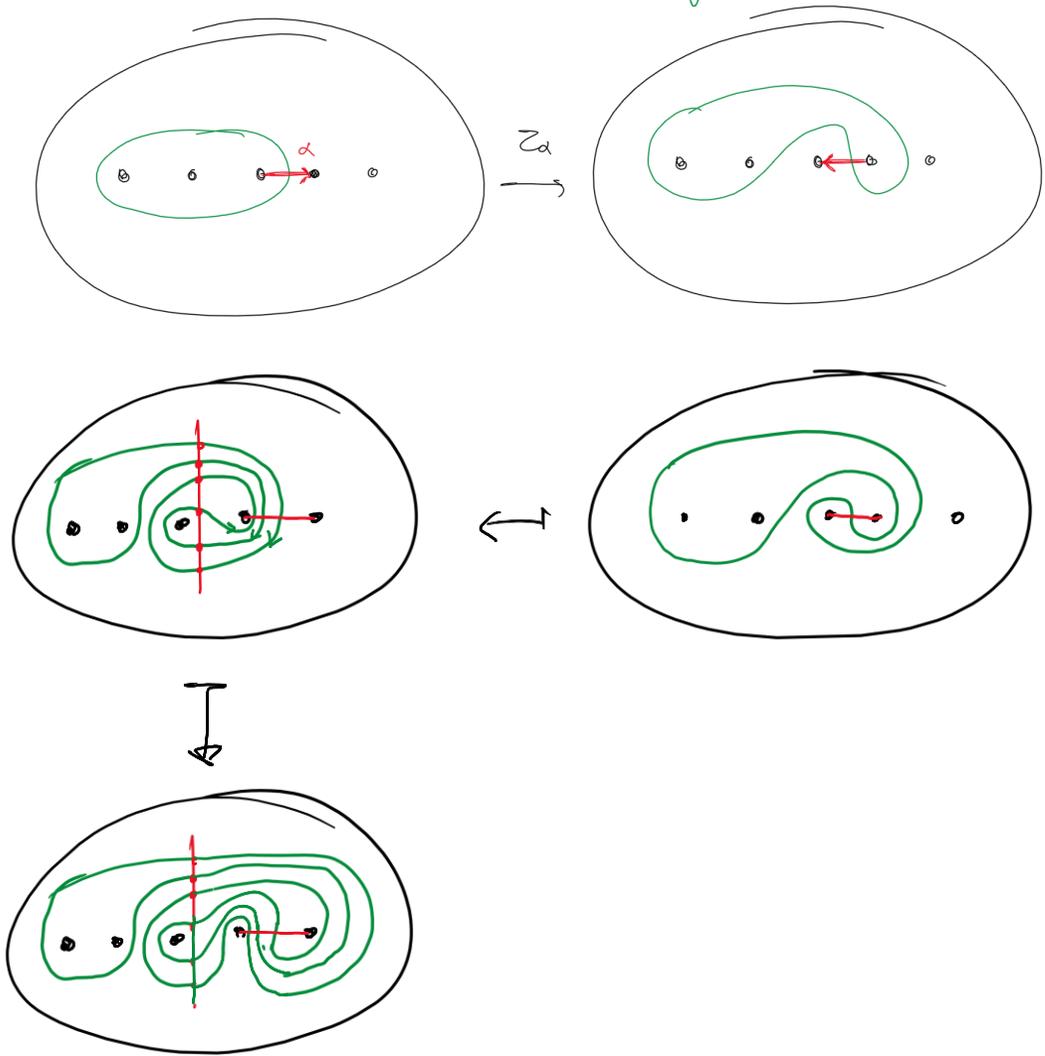
Aristas : Hay una arista entre dos curvas (sin adyacentes)
 $i(\alpha, \beta) = 0$, i.e. si admiten representantes disjuntos



\oplus tiene una métrica natural $d(\alpha, \beta) = 1 \iff \alpha \text{ --- } \beta$

curvas no esenciales

$\mathcal{M}(D_n) \rightarrow C_c(D_n)$ geométricamente



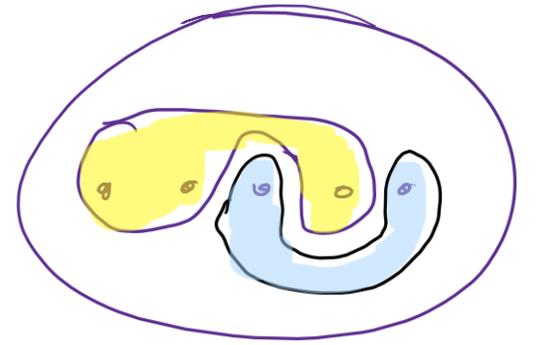
Clasificación de Thurston de las trenzas

Toda trenza está en alguna de las siguientes categorías:

① Es periódica: $\exists n \in \mathbb{N}$ fija todos los arcos.

② Es reducible: f no mezcla alguna parte del fluido.

③ Es pseudo-Anosov: f mezcla todo el fluido.



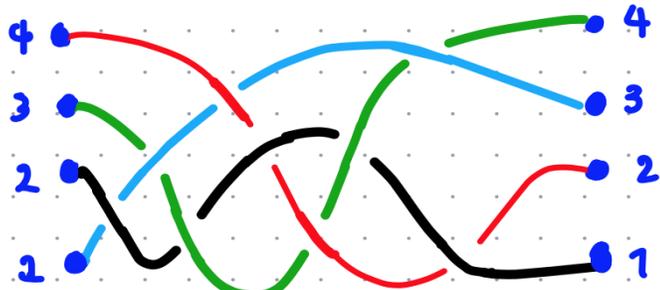
Dada una trenza, me puedo hacer las siguientes dos preguntas:

A) ¿cómo puedo distinguir qué tipo de trenza tengo?

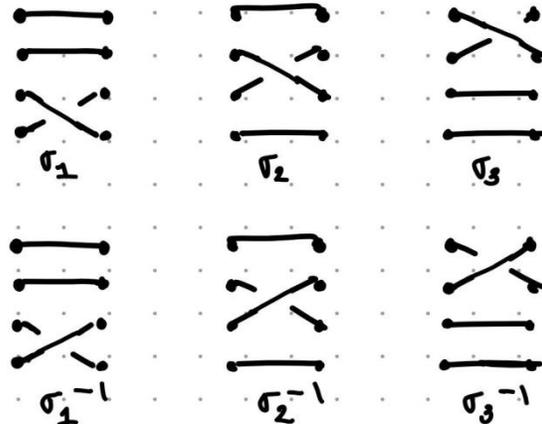
B) ¿Qué tipo de información me puede dar sobre el nudo que obtengo?

Usaremos geometría y combinatoria de los grupos de trenzas

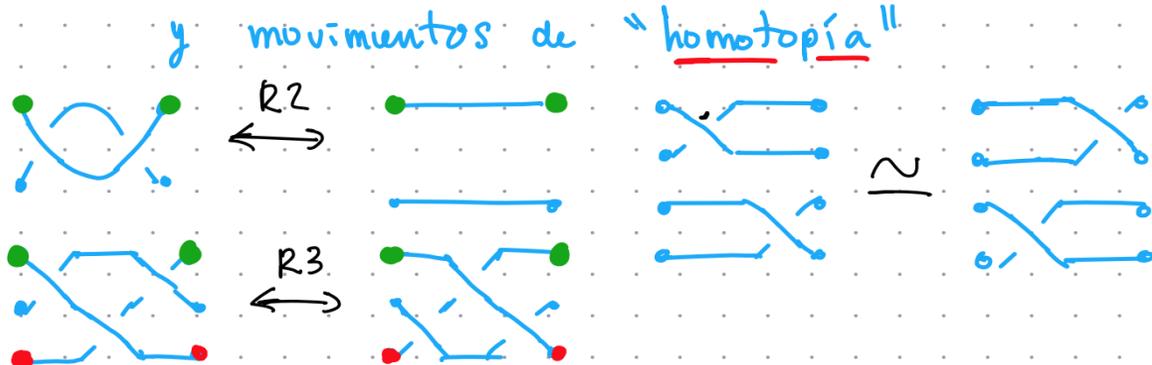
Teoría de Garside en grupos de trenzas



$\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_1$



Estos diagramas estan determinados por los cruces consecutivos



Tenemos que

$$\rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle \langle \sigma_i^2 \rangle \rangle$$

$$\theta: B_n \rightarrow S_n$$

Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

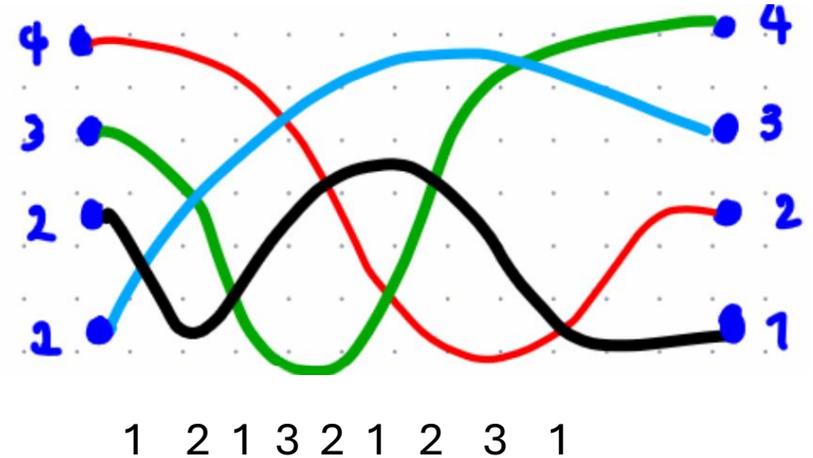
$$\rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \rangle$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: B_n \rightarrow S_n$$



Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

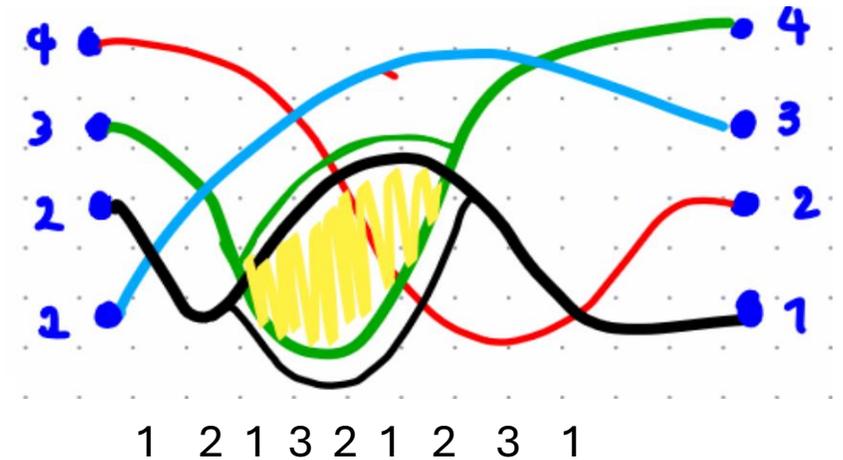
$$\rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \rangle$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: B_n \rightarrow S_n$$



Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

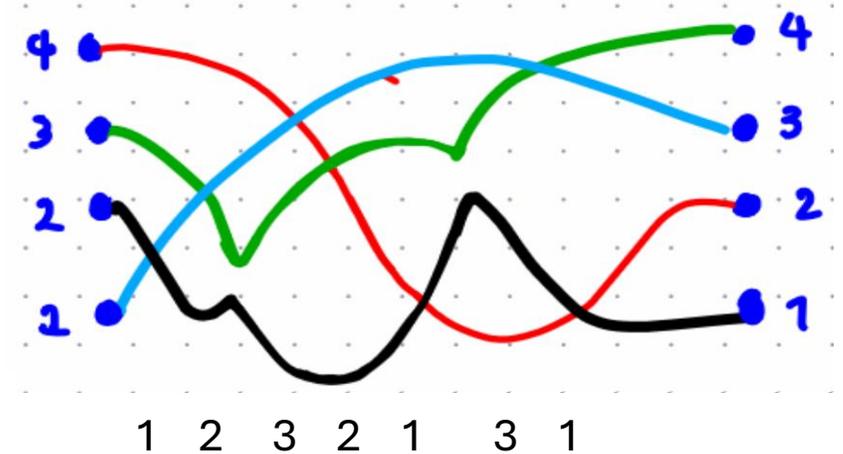
$$\begin{aligned} \rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: B_n \rightarrow S_n$$



Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

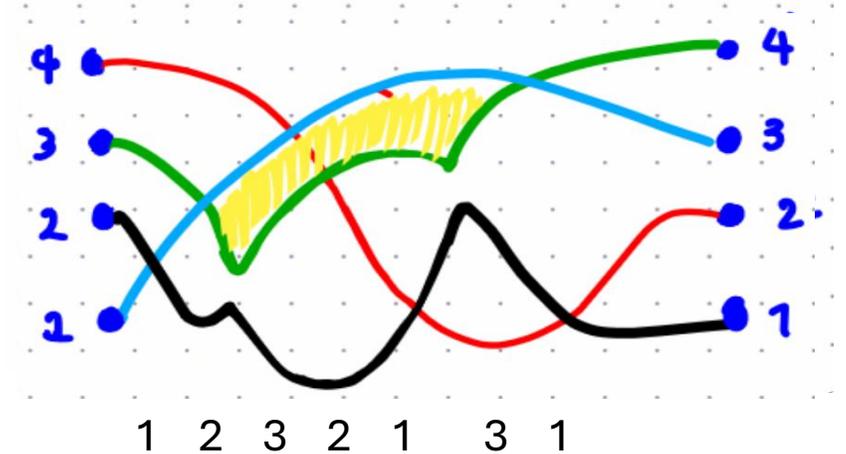
$$\begin{aligned} \rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: B_n \rightarrow S_n$$



Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

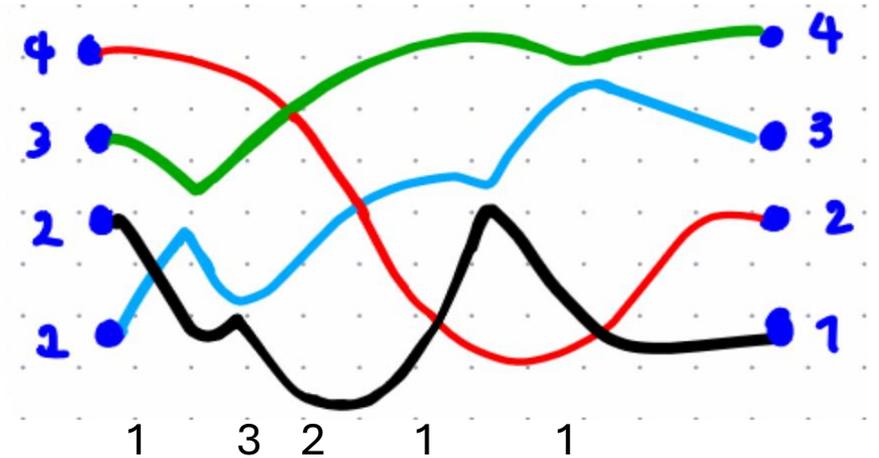
$$\begin{aligned} \rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: B_n \rightarrow S_n$$



Teoría de Garside en grupos de trenzas



Tenemos que

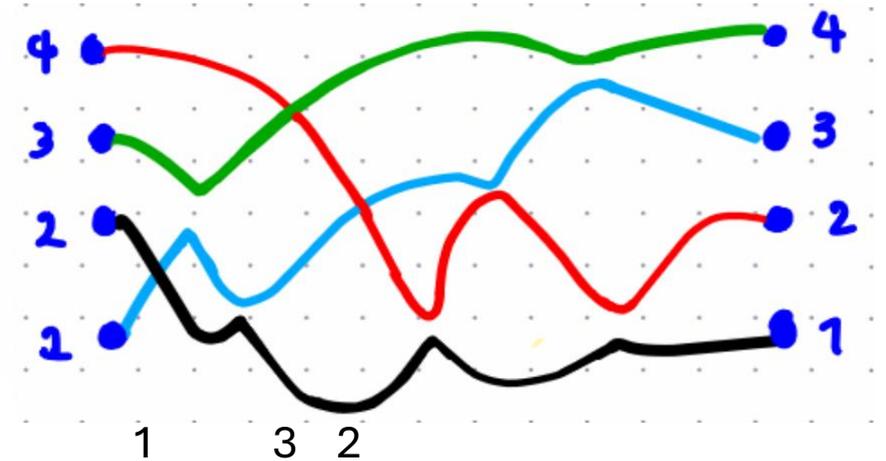
$$\begin{aligned} \rightarrow B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_n = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$$

[Tits] Todas las expresiones reducidas están relacionadas por movimientos de trenzas



$$\tau: S_n \rightarrow B_n$$



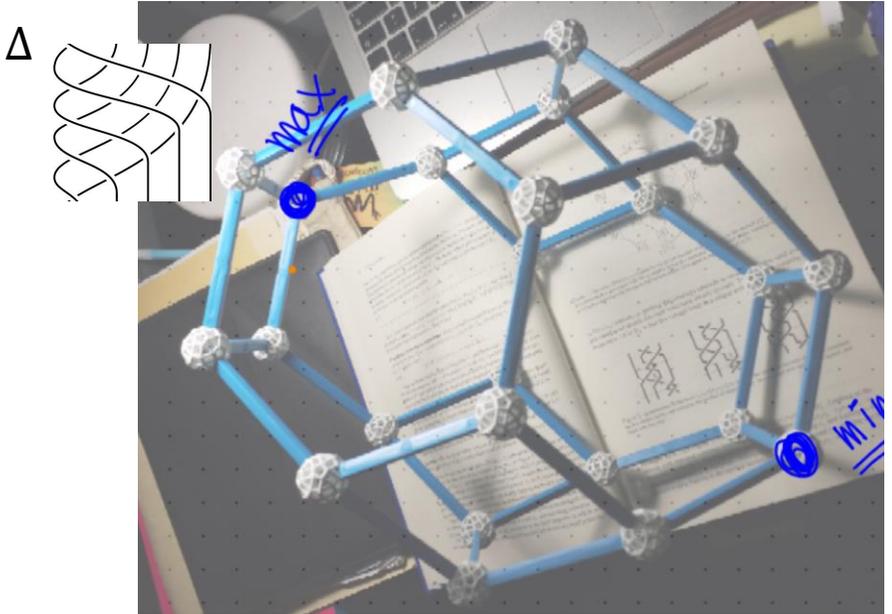
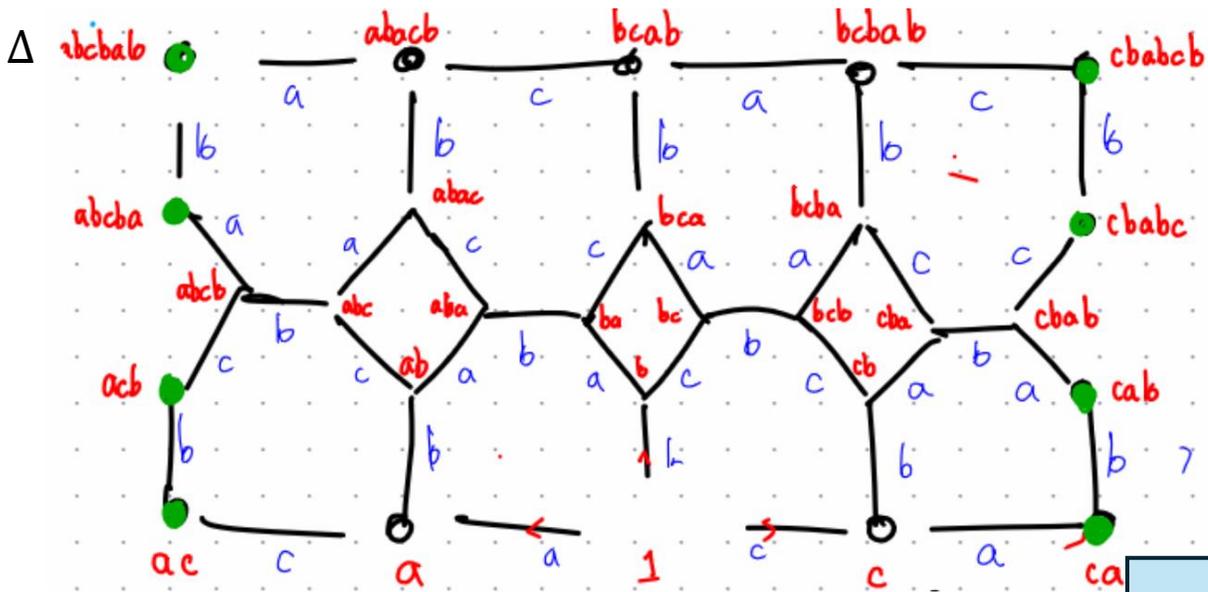
Teoría de Garside en grupos de trenzas



$$\theta: B_n \rightarrow S_n$$

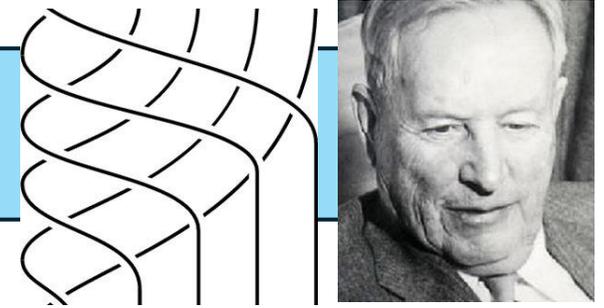
$$\tau: S_n \rightarrow S_n$$

$$w_0 < w_1 \iff \exists u \quad w_1 = w_0 u \text{ tal que } l_S(w_1) = l(w_0) + l(u)$$



Con este orden los grupos de Coxeter forman una retícula ((i.e. $\forall a, b \in W \exists mcd(a, b), mcm(a, b)$))

Teoría de Garside en grupos de trenzas



$$\theta: B_n \rightarrow S_n$$

$$\tau: S_n \rightarrow B_n$$

$$w_0 < w_1 \Leftrightarrow \exists u \quad w_1 = w_0 u \text{ tal que } l_S(w_1) = l(w_0) + l(u)$$

Con este orden el grupo simétrico forma una retícula
(i.e. $\forall a, b \in W \exists \text{mcd}(a, b), \text{mcm}(a, b)$)

Este orden lo podemos extender al monoide de las trenzas
positivas B_n^+

$\forall \beta \in B_n$ existen $k \in \mathbb{Z}$ y $w_1, \dots, w_k \in S_n$ tales que
 $\beta = \Delta^k \tau(w_1) \tau(w_2) \cdots \tau(w_k)$

Luego se extiende a todo B_n

Garside – Brieskorn+Saito - Deligne

Dada una trenza $b \in B_n^+$

$$b_1 = \text{mcd}(\Delta, b) \Rightarrow b = b_1 b_1^*$$

$$b_2 = \text{mcd}(\Delta, b_1^*) \Rightarrow b = b_1 b_2 b_2^*$$

...

$$b = b_1 b_2 \dots b_q$$

$$b \leq \Delta \Leftrightarrow b \in \tau(S_n)$$

Teoría de Garside en grupos de trenzas

Solución al problema de la palabra (Garside)

Solución al problema de conjugación (Garside/GonzálezMeneses-Franco-Birman)

Permite distinguir el tipo de trenza a la Thurston
(GonzálezMenes-Wiest-Calvez)

Ayuda a construir un orden invariante sobre las trenzas

Decimos que G admite un orden invariante izquierdo $<_{lo}$ si

$$g <_{lo} h \Rightarrow wg <_{lo} wh \quad \forall w \in G$$

[Dehornoy] Los grupos de trenzas admiten un orden invariante izquierdo

[Short-Wiest] Usando MCG se les puede dar una infinidad de órdenes invariantes izquierdos

El piso de Dehornoy $[\beta]_D$

$$\beta < 1 \quad \Delta^{-(2[\beta]+2)} <_{lo} \beta <_{lo} \Delta^{-2[B]} \quad 1 <_{lo} \beta \quad \Delta^{2[\beta]} <_{lo} \beta <_{lo} \Delta^{2[B]+2}$$



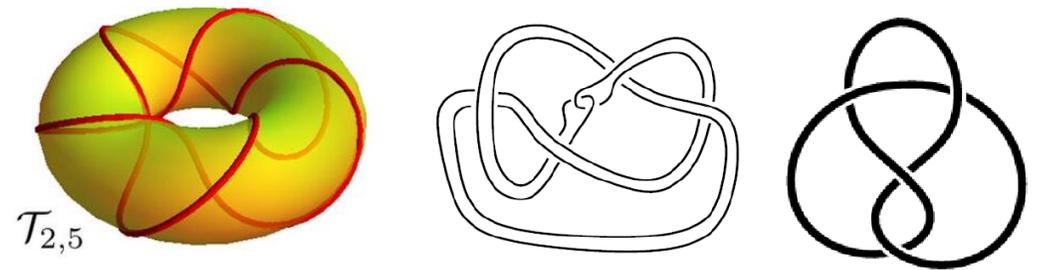
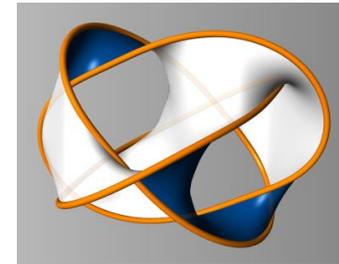
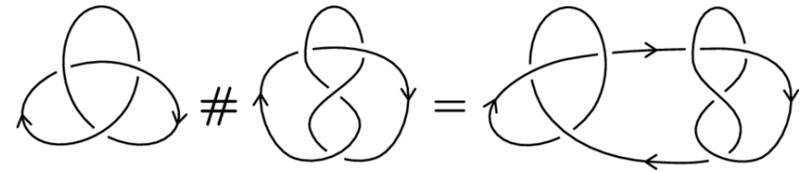
Aplicaciones a Teoría de Nudos

Un nudo se dice primo si no se puede expresar como la suma conexa de dos nudos

El género de un nudo es el género mínimo de sus superficies de Seifert

Clasificación de Thurston de nudos:

- 1) Nudos toroidales
- 2) Nudos satélites
- 3) Nudos hiperbólicos



Aplicaciones a Teoría de Nudos

$$\beta < 1 \quad \Delta^{-(2[\beta]+2)} <_{lo} \beta <_{lo} \Delta^{-2[B]} \quad \text{El piso de Dehornoy} \quad [\beta]_D \quad 1 <_{lo} \beta \quad \Delta^{2[\beta]} <_{lo} \beta <_{lo} \Delta^{2[B]+2}$$

Un nudo se dice primo si no se puede expresar como la suma conexas de dos nudos

$$[\beta]_D \geq 2 \Rightarrow cl(\beta) \text{ es primo}$$

El género de un nudo es el género mínimo de sus superficies de Seifert

$$[\beta]_D < g(cl(\beta)) + 1$$

Clasificación de Thurston de nudos:

- 1) Nudos toroidales
- 2) Nudos satélites
- 3) Nudos hiperbólicos

Sea $[\beta]_D \geq 3$ entonces

- 1) $cl(\beta)$ toroidal $\Leftrightarrow \beta$ es periódica
- 2) $cl(\beta)$ satélite $\Leftrightarrow \beta$ es reducible
- 3) $cl(\beta)$ hiperbólico $\Leftrightarrow \beta$ es pseudoAnosov

¿Qué sigue?

Construir más puentes entre la combinatoria de los grupos de trenzas y la topología de sus nudos

Otros enfoques para los grupos de trenzas

Otras presentaciones para los grupos de trenzas
(duales + conglomerado)

Otros órdenes para los grupos de trenzas

Generalizaciones de los grupos de trenzas

Grupos de Artin / Coxeter

Grupos de trenzas en superficies

Grupos modulares de superficies

Construir otras algebras de nudos para definir invariantes polinomiales

Publicidad - invitación



Décima Escuela Oaxaqueña de Matemáticas **Híbrida**

Unidad Oaxaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM

1ª parte (virtual) del 6 al 24 de enero | 2ª parte (presencial) del 5 al 7 de febrero de 2025



<https://sites.google.com/im.unam.mx/10escuelaoaxaqueademates/>



GRACIAS POR SU ATENCIÓN

bruno@im.unam.mx

COXETER Y ARTIN-TITS

- Los grupos generados por reflexiones son grupos de Coxeter.

Al quitar la involución de la relación de los grupos de Coxeter obtenemos los grupos de Artin – Tits.

El ejemplo estrella es:

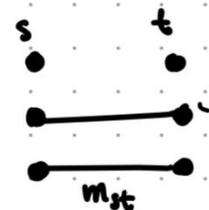
Coxeter → Simétrico
Artin → Trenzas

$$\Pi(a,b;m) = \begin{cases} (ab)^k & m=2k \\ (ab)^k a & m=2k+1 \end{cases} = \underbrace{aba\dots}_{m \text{ veces}}$$

Coxeter graphs:

$$V(P) = S$$

$$E(P) :$$



$$m_{st} = 2$$

$$m_{st} = 3$$

$$m_{st} \geq 3$$

$$m_{st} \in \{2,3,\dots, \infty\}$$

$$W(P) = \langle S \mid \Pi(s,t;m_{st}) = \Pi(t,s;m_{st}) \quad m_{st} \neq \infty, s^2=1 \rangle$$

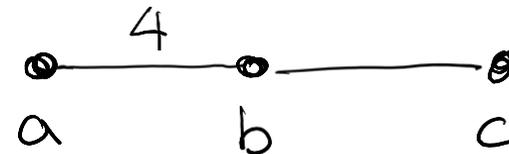
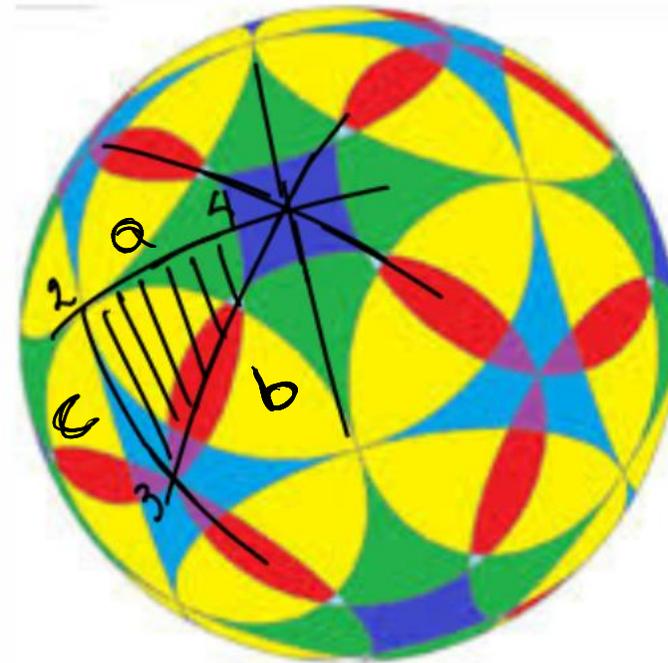
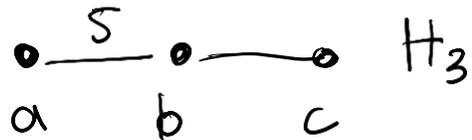
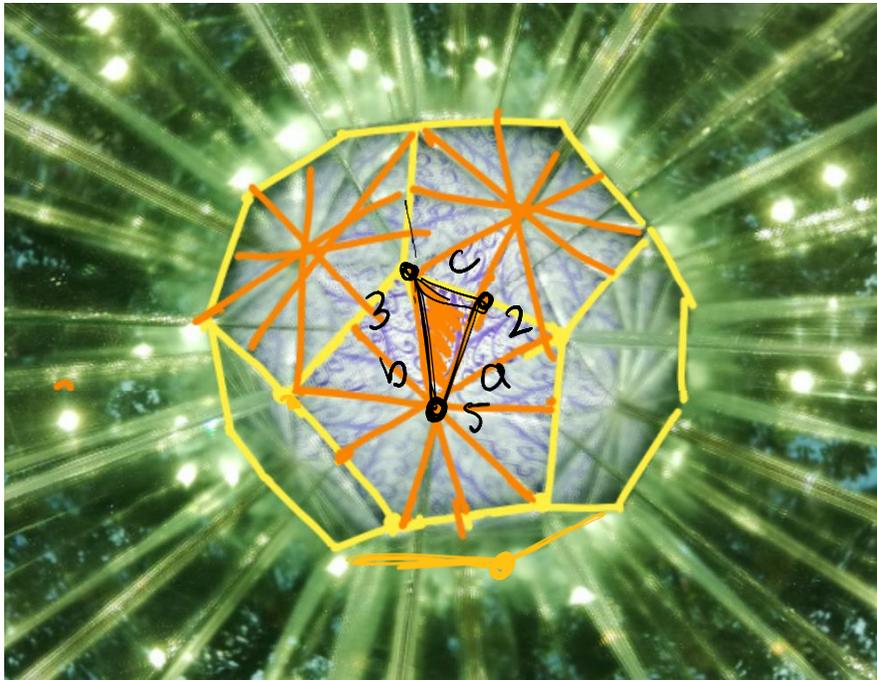
$$A(P) = \langle \Sigma_S \mid \Pi(\sigma_s, \sigma_t; m_{st}) = \Pi(\sigma_t, \sigma_s; m_{st}) \quad m_{st} \neq \infty \rangle$$

Groups generated by reflections

Extensions of Coxeter groups

Grupos de Coxeter de tipo finito (esféricos)

→ Los grupos de Coxeter de tipo finito son grupos generados por reflexiones en R^n que inducen una teselación en la esfera.



Grupos de Artin de tipo finito (esféricos)

Veamos cómo funciona con las trenzas

$$\theta: A(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma)$$

$$\tau: W(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma)$$

$$w_0 < w_1 \Leftrightarrow \exists u \quad w_1 = w_0 u \text{ tal que } l_S(w_1) = l(w_0) + l(u)$$

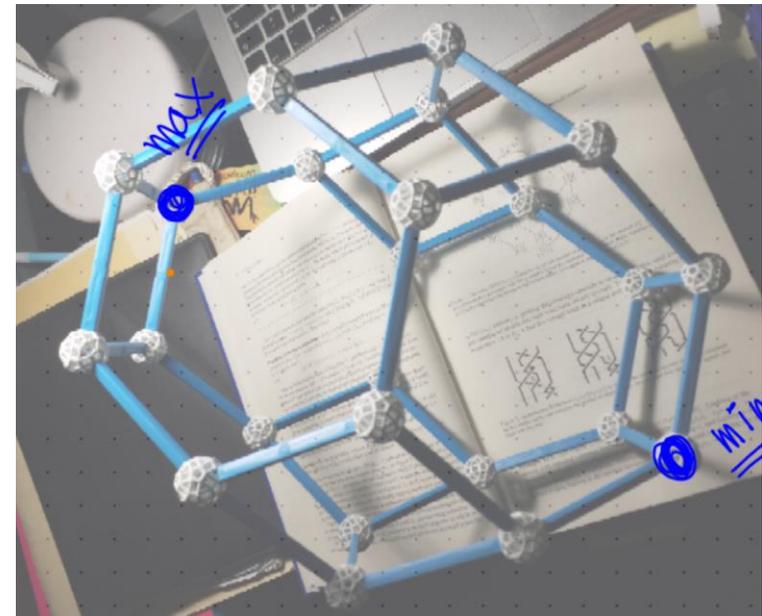
Con este orden los grupos de Coxeter forman una retícula ((i.e. $\forall a, b \in W \exists \text{mcd}(a, b), \text{mcm}(a, b)$))

Este orden lo podemos extender al monoide de las trenzas positivas B_n^+

$\forall \beta \in B_n^+ \exists$ únicos $w_1, \dots, w_k \in S_n$ tales que $\beta = \tau(w_1)\tau(w_2) \cdots \tau(w_k)$

Luego se extiende a todo B_n

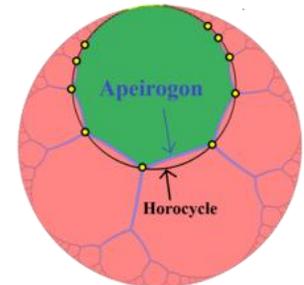
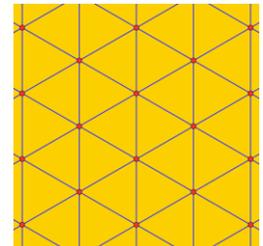
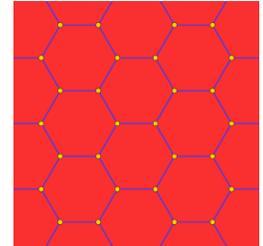
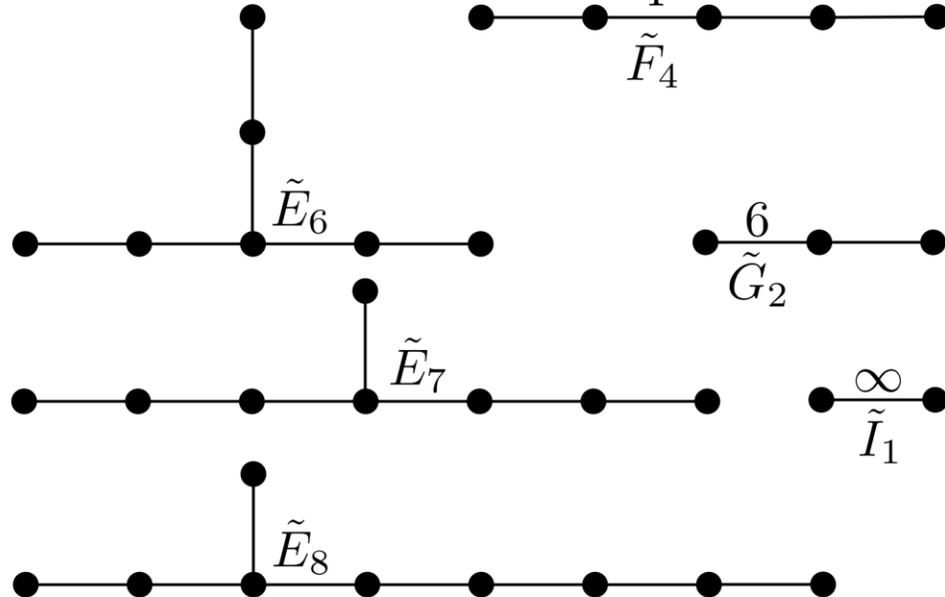
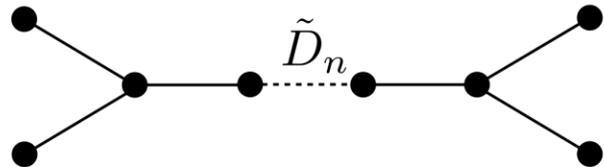
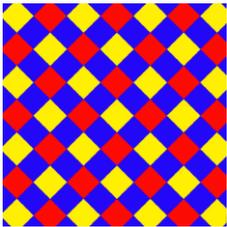
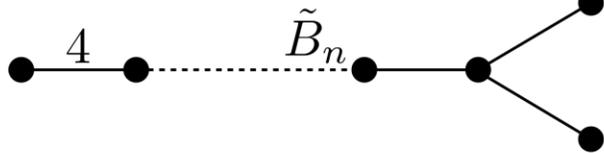
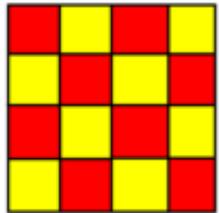
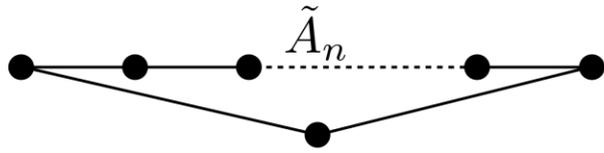
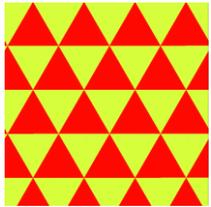
Garside – Brieskorn+Saito - Deligne



La relación Coxeter – Artin sigue siendo misteriosa

→ Decimos que Γ es de tipo **euclideo** o **afin** si $W(\Gamma)$ actúa geoméricamente en \mathbb{R}^n

Teorema (Coxeter – Tits) Sea Γ una gráfica de Coxeter, $W(\Gamma)$ es de tipo euclideo si y sólo sí Γ es una de las siguientes gráficas



Otras estructuras para los grupos de trenzas y de Artin



Estructura dual para los grupos de Artin tipo esférico

$T := \{ wsw^{-1} \mid s \in S, w \in W \}$
(conjunto de reflexiones en W)

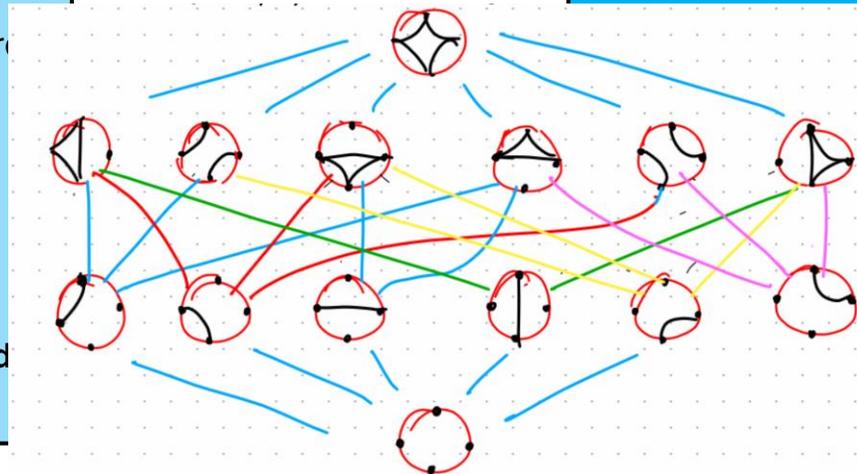
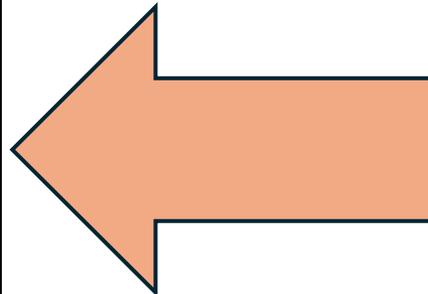
T es un conjunto generador para W

Consideramos el orden dado por l_T

Al considerar los intervalos máximos dentro del grupo con este orden obtenemos las llamadas

Particiones no cruzantes de W

Estas forman una retícula y nos da una estructura de Garside **distinta a la obtenida originalmente**



Teoría de Garside

Una versión completamente combinatoria de la Teoría de Garside ((McCammond et al.))

1) Dado un COPO etiquetado P

→ $M(P)$ – un monoide

→ $G(P)$ – un grupo

→ $K(P)$ – un complejo simplicial, $\pi_1(K(P)) = G(P)$

... permite un conjunto de propiedades (Retícula +

... admite formas normales

... admite formas normales

... es un espacio de Eilenbergh-McLane

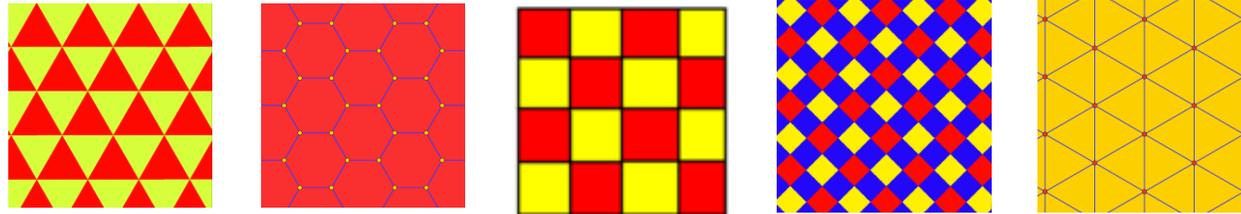
... Teoría de Garside

+ CP

La relación Coxeter – Artin sigue siendo misteriosa

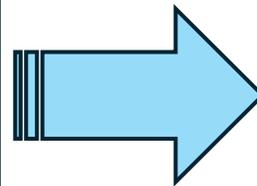
→ Decimos que Γ es de tipo **euclideo** o **afin** si $W(\Gamma)$ actúa geoméricamente en \mathbb{R}^n

Teorema (Coxeter – Tits) Sea Γ una gráfica de Coxeter, $W(\Gamma)$ es de tipo euclideo si y sólo sí Γ es una de las siguientes gráficas



En general para los grupos de tipo euclideo no se han logrado resolver estos problemas

+ Conjetura $K(\pi, 1)$
+ WP + CP + FN



+ Francois Digne – Estructura de Garside para \tilde{A}, \tilde{C}

+ Jon McCammond et al :

Estudia y caracteriza retículas en $Iso(\mathbb{R}^n)$

Construye versiones duales para los afines
(estas versiones no son Garside)

Encaja los duales en un algo que sí es Garside

=> Conjetura $K(\pi, 1)$

((esto prueba que admiten solución a WP y CP, pero no da una solución explicita))

Concluyendo

1. Resolver el problema de la palabra en un grupo puede ser bastante complejo, pero si de alguna manera logramos darle una estructura de Garside, obtendremos muchas propiedades gratis
2. A partir de un COPO etiquetado adecuadamente podemos obtener
 - Un monoide, un grupo y un complejo simplicial (un modelo del grupo)
 - Si además el COPO es una retícula y cumple algunas otras propiedades, tenemos una estructura de Garside para nuestro grupo ((maravilloso))
 - **Reto: encontrar / construir este tipo de COPOs !!!**
3. ¿Podríamos encontrar otras estructuras de Garside para los de tipo esférico?
 - Barot-Marsh // Grant-Marsh – dan otras presentaciones usando mutaciones en carcajes
4. ¡¡¡ Los grupos de Artin-Tits euclidianos siguen siendo misteriosos !!!
 - Estudiarlos a través de sus grupos de Coxeter (i.e. grupos de isometrías en R^n)
 - Construir algún COPO que logre modelarlo adecuadamente
 - Estudiar su combinatoria a través de su comportamiento local