

# De curvas en superficies a complementos de enlaces

José Andrés Rodríguez Migueles

Escuela "Fico González Acuña" de Nudos y 3-variedades  
IMUNAM, Cuernavaca

Diciembre, 2024

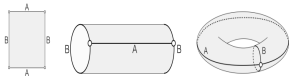




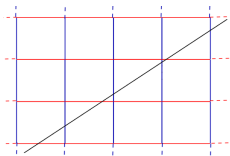
- 1 Curvas en superficies
- 2 Tangente unitario de una superficie
- 3 Complementos de levantamientos

Dada una cuadrícula de cuadrados unitarios en el plano Euclidiano.

Podemos pensar el espacio cociente bajo la acción de traslaciones enteras en el plano euclideano. O equivalentemente, puedes tomarte una de las cuadrículas e identificar los lados opuestos. de ambas formas obtendremos al **toro cuadrado** (superficie plana).

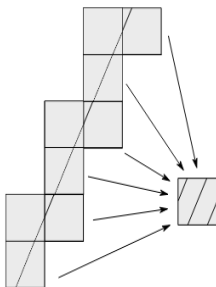


Sea  $L$  una línea recta en el plano.



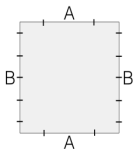
Cuando la línea recta toca el borde superior, reaparece en el mismo lugar en el borde inferior y continúa. De manera similar, cuando la trayectoria toca el borde derecho, reaparece en el borde izquierdo.

Es fácil pasar de una línea recta en un trozo de papel cuadrículado a una trayectoria en el toro cuadrado: podemos imaginar que el papel cuadrículado está formado por cuadrados transparentes y apilarlos unos sobre otros mediante traslación. Ahora, todas las trayectorias estarán en un solo cuadrado, y esa será la trayectoria en el toro cuadrado.

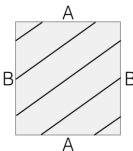


Inversamente, podemos desdoblar una trayectoria recta sobre el toro cuadrado en una línea sobre un trozo de papel cuadrículado: cuando la línea toca el borde derecho del toro, la desplegamos hacia la derecha, y cuando toca el borde superior, la desplegamos hacia arriba.

A continuación se muestra una estrategia para dibujar una trayectoria con pendiente  $\frac{p}{q}$ :  
 Haremos marcas a lo largo de las tapas del cuadrado unitario, y luego los conectaremos con segmentos rectos. Una trayectoria con pendiente  $\frac{p}{q}$  interseca a la tapa superior/inferior  $p$  veces y las tapas derecha/izquierda  $q$  veces, y estas intersecciones están espaciadas de manera uniforme.



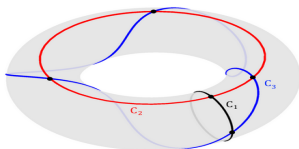
Conecta las marcas con segmentos de línea de pendiente  $\frac{p}{q}$ , lo cual es más fácil si comienzas en una esquina y simplemente los haces coincidir.



¡Verás que los segmentos de línea son paralelos y están espaciados de manera uniforme!

Decimos que dos trayectorias rectas cerradas son **linealmente isotópicas** si son paralelas (i.e. si tienen la misma pendiente) y su clase de equivalencia esta representada por el número racional igual a su pendiente

El **número de intersección geométrica** entre dos clases de trayectorias rectas distintas  $a$  y  $b$  en el toro cuadrado, se define como el número de puntos de intersección entre cualquiera de los representantes de  $a$  y  $b$ , esta denotado por  $i(a, b)$ .



### Lemma

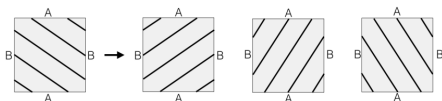
Sean  $\frac{p}{q}$  y  $\frac{r}{s}$  dos trayectorias rectas no paralelas en el toro cuadrado.

$$i\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = |ps - qr|.$$

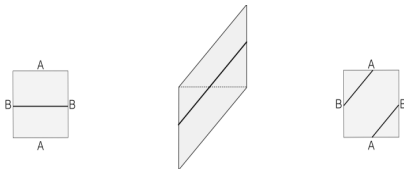




Vamos a describir simetrías que el toro cuadrado en si mismo en si mismos.

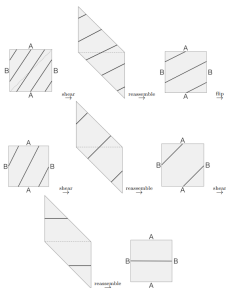


- **Reflexión:** Reflejando a lo largo de los ejes verticales, horizontales y diagonales.
- **Rotación:** Rotar por un múltiplo entero de  $\frac{\pi}{2}$ . Notemos que rotar  $\frac{\pi}{2}$  tiene el mismo efecto que reflejar en la diagonal.
- **Transvección:** Aplicar la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  o  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Estas transformaciones mandan un cuadrado en un paralelogramo. La última es la más interesante, porque podemos reducir cualquier otra simetría de transvección aplicando repetidas veces ésta.



# Transitividad de $PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright$ trayectorias rectas cerradas

Notemos como mandamos nuestra trayectoria recta cerrada de pendiente  $3/2$  a una línea horizontal.  $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2/1} = 1 + \frac{1}{1+1} = [1, 1, 1]$ .

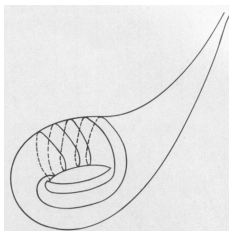


**Algoritmo:** Iteramos el proceso hasta que nos pare:

- 1 Si la pendiente es mayor que 1 o igual a 1, aplicamos  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 2 Si la pendiente esta entre 0 y 1, aplicamos  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 3 Si la pendiente es 0 paramos.

Fijemos un punto  $p$  en el toro cuadrado (por ejemplo la imagen bajo el cociente del plano euclideo del origen). Removemos dicho punto del toro cuadrado, obteniendo el **toro cuadrado con una ponchadura**.

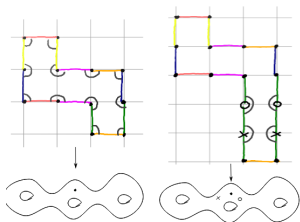
Notemos que para cada clase de trayectorias rectas cerradas rectas en el toro cuadrado, tiene varios representantes que no pasan por el punto  $p$ . Entonces a las clases de trayectorias rectas cerradas le podemos asociar la misma gráfica de Farey.



Notemos por el caso del toro con un agujero hay mucho más clases de homotopía de curvas cerradas, primitivas. Sin embargo, para las clases homotopía de curvas cerradas simples (sin autointersecciones) están en correspondencia con los números racionales junto con el infinito.

## Otras Superficies

**Clasificación de superficies:** Toda superficie de tipo finito, conexa, orientable y con frontera es difeomorfa a  $\Sigma_{g,b}$  con género  $g$  y  $b$  componentes frontera .



### Lemma

Tenemos que  $\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b$ .

# Curvas en superficies

Ahora nos fijamos en curvas cerradas en estas nuevas superficies y descubrimos un mundo variado.

## Proposición

*Sea  $\Sigma$  con  $\chi(\Sigma) < 0$  (admite una métrica completa con curvatura  $-1$ ). Si  $\alpha$  es una curva cerrada en  $\Sigma$  que no es homotópica en una vecindad de una ponchadura, entonces  $\alpha$  es homotópica a una curva cerrada geodésica única.*

Clases de homotopía  $\leftrightarrow$  Clases de conjugación  $\leftrightarrow$  Geodésicas cerradas  
 libre de curvas cerradas en  $\pi_1(\Sigma)$  orientadas  
 cerradas orientadas

## Curvas en posición mínima

Dos curvas cerradas simples  $\alpha$  y  $\beta$  en  $\Sigma$  están en **posición mínima** si se intersecan transversalmente en el mínimo número de puntos dentro de todos los representantes de sus clases de homotopía libre.

¿Cómo podemos saber si dos curvas cerradas simples transversales en  $S_g$  están en posición mínima?

El complemento de dos curvas cerradas simples transversales es una unión disjunta de polígonos; uno de esos conjuntos es un **bigono**:



### Proposición

*Dos curvas transversales simples cerradas en una superficie  $\Sigma$  están en posición mínima si y sólo si no forman un bigono.*

Las geodésicas en curvatura constante no positiva cumplen dicha propiedad.

## El espacio tangente a una superficie

Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, orientada y conexa. Los planos  $T_x(\Sigma)$  tangentes a  $\Sigma$  en  $x$  se habrán de cortar, por lo que imaginemoslos disjuntos y componemos un espacio:

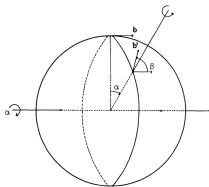
$$T(\Sigma) := \{(x, v) \mid x \in \Sigma, \quad v \in T_x(\Sigma)\}.$$

$\Sigma$  se encaja en  $T(\Sigma)$  como la sección cero. Además la aplicación  $T(\Sigma) \rightarrow \Sigma$  definida como la proyección a la primera coordenada es un haz fibrado con fibra un espacio vectorial real.

De  $T(\Sigma)$  se obtienen dos variedades interesantes. Una es el **tangente unitario** o espacio de elementos de línea orientados de  $\Sigma$ , denotado por  $UT(\Sigma)$ , formado por los pares  $(x, v) \in T(\Sigma)$  con  $\|v\| = 1$ ; el otro es el **tangente proyectivo**  $PT(\Sigma)$ , obtenido por identificar  $(x, v)$  con  $(x, -v)$  en  $T(\Sigma) \setminus \Sigma$  o en  $UT(\Sigma)$ .

## Tangente unitario en la 2-esfera

Sea  $\Sigma_{0,0}$  la 2-esfera. Cada elemento de  $UT(\Sigma_{0,0})$  es un versor tangente a  $\Sigma_{0,0}$ . Fijando un versor base  $b$  vemos que otro versor  $b'$  define unívocamente una rotación de  $\mathbb{R}^3$  que pasa  $b$  a  $b'$ . Así  $UT(\Sigma_{0,0})$  es el **espacio de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ ,  $SO(3)$** .



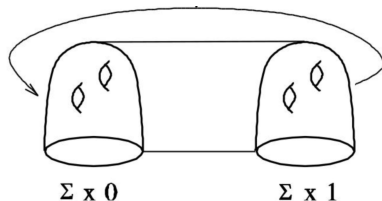
Tómese ahora una bola  $B^3 \subset \mathbb{R}^3$  de radio  $\pi$ . Entonces a cada punto  $x \in B^3$  le corresponde una rotación de  $\mathbb{R}^3$  del siguiente modo. Al 0 le corresponde la identidad. A  $x \neq 0$  le corresponde un giro a la derecha del eje  $0x$  y ángulo  $d(0, x)$ , como a puntos antipodales les corresponde el mismo giro (ángulo  $\pi$ ) es necesario identificarlos. El resultado es homeomorfo al **espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3$** .



## Haz en círculos trivial sobre superficies

Sea  $\Sigma$  una superficie compacta conexa y orientable. Como toda variedad conexa orientable, tiene un único haz lineal orientable.

$$\Sigma \times I$$



Denotamos

$$\Sigma \times S^1$$

respectivamente el doble de  $\Sigma \times I$  a lo largo de su frontera.

## Haces en círculos sobre superficies

Comenzamos explorando el caso donde la superficie base  $\Sigma$  tiene una frontera no vacía.

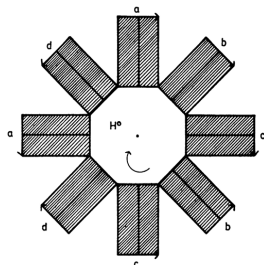
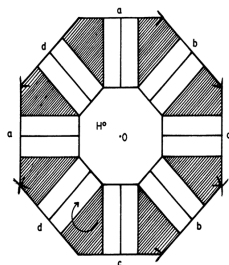
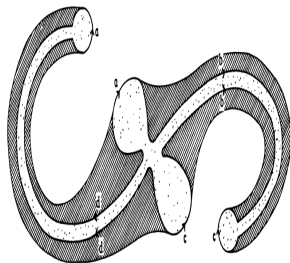
### Lemma

*Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , los haces en círculos orientable sobre  $\Sigma$  son todos homeomorfos.*

**Dem:** Sea  $N \rightarrow \Sigma$  un haz en círculos orientable. Descompongamos  $\Sigma$  como un disco  $D$  con algunos pares de segmentos disjuntos  $(I_i, J_i)$  en  $D$  que se van a pegar. Puesto que  $D$  es contráctil, la restricción de  $N$  a  $D$  es un producto  $D \times \mathbb{S}^1$  y  $N$  se obtiene a partir de él pegando los anillos  $I_i \times \mathbb{S}^1$  y  $J_i \times \mathbb{S}^1$  mediante homeomorfismos que preservan las fibras e inversión de orientación. Dos de estos mapas son siempre isotópicos y, por lo tanto,  $N$  está determinado de forma única.

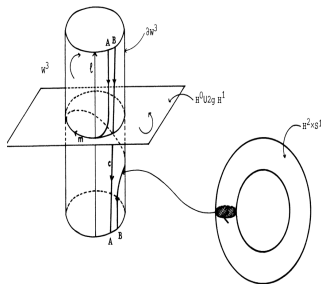
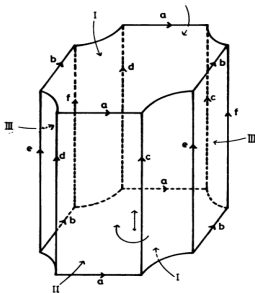
□

Ahora sea  $\Sigma$  una superficie cerrada. Cortamos la superficie mediante  $2g$  curvas de modo que se obtenga un polígono de  $4g$  lados.



Quitamos al polígono el interior de la unión  $U$  de  $2g$  pequeños entornos de sus vértices que producen, tras la identificación que recompone  $\Sigma$ , un abierto de  $\Sigma$  homeomorfo al interior de  $D^2$ . Obtenemos así una "cruz con  $2g$  barras" que llamamos  $P^2$ .

Por el lema anterior todo haz en círculos sobre  $\Sigma \setminus U$  es trivial, llamado  $W^3$ , que resulta de identificar  $\mathbb{S}^1 \times \{I\}$  con su respectiva pareja, en donde  $I$  y es el lado de  $P^2$  con la identificación que reproduce  $\Sigma$ . Notemos que  $W^3$  tiene como frontera un toro fibrado  $T^2$  orientado como frontera de  $W^3$ . En  $T^2$  hay un par meridiano-longitud formado por  $\mu$ , borde de una sección, y de  $\lambda$  una fibra orientada de modo que  $\langle \mu, \lambda \rangle = +1$ .



## El número de Euler

Ahora hay que identificar  $W^3$  con  $\mathbb{S}^1 \times U$ , de modo que el resultado sea un haz en círculos sobre  $\Sigma$ . La fibración por circunferencias, definida en  $\partial W^3$ , esta esencialmente caracterizada por la intersección algebraica de  $\mu$  con la circunferencia  $C$  (está orientada de modo que  $\langle C, \lambda \rangle = +1$ ). El número entero  $e$  así obtenido determina el haz en círculos a menos de equivalencia que preserve la orientación.

El número  $e$ , que por lo demás es tal que

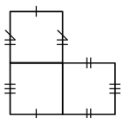
$$C \cong \mu + e\lambda \quad (\text{en } W^3)$$

se llama el número de Euler de haz fibrado y en cierto modo mide la obstrucción a seccionar.

Siguiendo a Seifert, denotamos a dicho fibrado  $\{O, o, g | -e\}$  donde las dos primeras indican que el haz es una variedad orientable de base orientable de género  $g$ ;  $e$  es el número de Euler.

## El número de Euler de $UT(\Sigma)$

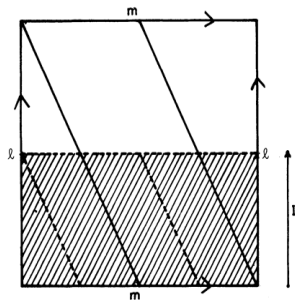
Sea  $\vec{v}$  un campo vectorial unitario (tangente) en  $\Sigma$  con exactamente un cero (punto singular) en el vértice del polígono  $x_0 \in U$ , por ejemplo, al ver al 4g-góno como una **superficie de traslación con el campo vectorial horizontal orientado**.

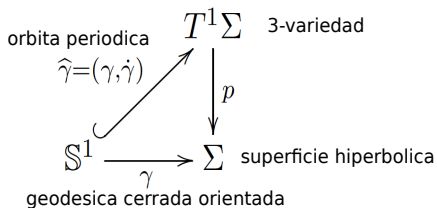
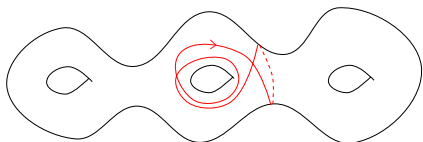


Entonces  $\vec{v}(x)$  está bien definido para  $x \in \Sigma \setminus U$  y nos da una función de  $\Sigma \setminus U$  a  $UT(\Sigma)$ , como  $x \mapsto (x, \vec{v}(x))$ . Cada curva se levanta por medio de este campo vectorial ( $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t), n(\gamma(t)))$ ), entonces la función anterior define una homotopía entre el producto de la frontera del 4g-góno y la imagen de la frontera de  $\partial U$ . Se sigue que el número de Euler es el grado de dicha función restringida a  $\partial U$  por el campo vectorial  $\vec{v}$ . Queda en nuestro caso particular es  $-(2 - 2g)$ . De hecho, esto es también consecuencia del **Teorema de Poncaré-Hopf**.

## El tangente proyectivo de una superficie $PT(\Sigma)$

Tenemos en cada fibra el cociente del mapeo antipodal para obtener el  $PT(\Sigma)$  lo que implica que  $PT(\Sigma)$  es  $\{O, o, g | 2(-(2 - 2g))\}$  ya que le da dos vueltas a la fibra, cuando antes de la proyectivización le daba una.

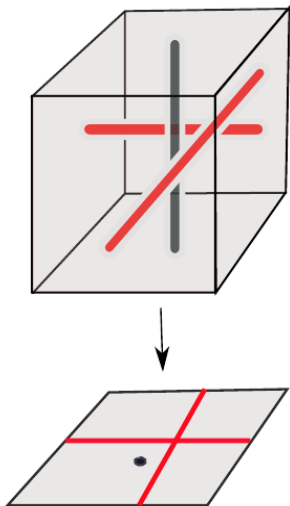


Levantamientos canónicos en  $PT(\Sigma)$  (Flujo geodésico)

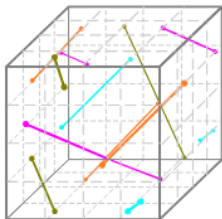
$-\hat{\gamma}$  es un nudo en  $UT\Sigma$ .

-Denotaremos como *levantamiento canónico* de  $\gamma$  a la órbita periódica del flujo geodésico asociada a  $\gamma$ ,



Ejemplo: Pareja de levantamientos canónicos en  $PT(\Sigma_{1,1})$ .

Borromean rings

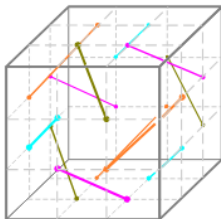
Levantamientos geodésicos en  $PT(\Sigma_{1,1})$ (c)  $\Gamma$ 

$$R_1 : \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right) + (1, 1, 1)t$$

$$R_2 : \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) + (1, -1, 1)t$$

$$R_3 : \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) + (-1, -1, 1)t$$

$$R_4 : \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) + (-1, 1, 1)t$$

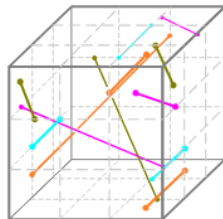
(d)  $+\Omega$ 

$$R_1 : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + (1, 1, 1)t$$

$$R_2 : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + (1, -1, 1)t$$

$$R_3 : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + (-1, -1, 1)t$$

$$R_4 : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + (-1, 1, 1)t$$

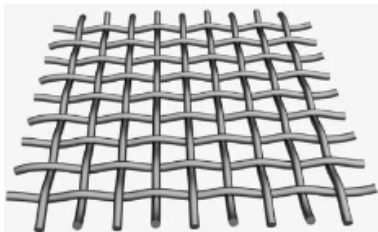
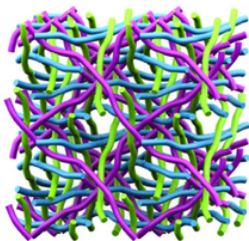
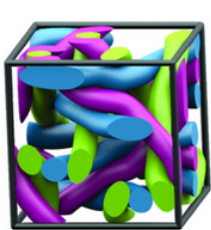
(e)  $+\Sigma$ 

$$R_1 : \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right) + (1, 1, 1)t$$

$$R_2 : \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right) + (1, -1, 1)t$$

$$R_3 : \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right) + (-1, -1, 1)t$$

$$R_4 : \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right) + (-1, 1, 1)t$$

Levantamientos encajados en  $PT(\Sigma_{1,1})$ 

# Tipo de homeomorfismo del complemento

$$M_{\widehat{\Gamma}} := PT(\Sigma) \setminus \widehat{\Gamma}$$

Notemos que  $M_{\widehat{\Gamma}}$  no depende de la métrica elegida.

## Theorem (R)

Sean  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  y  $\{\eta_1, \eta_2\}$  dos parejas de geodésicas simples no paralelas en  $\Sigma_{1,1}$ . Entonces:

$$M_{\{\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2\}} \cong M_{\{\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2\}} \Leftrightarrow \{[\eta_1], [\eta_2]\} = PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \{[\gamma_1], [\gamma_2]\}$$

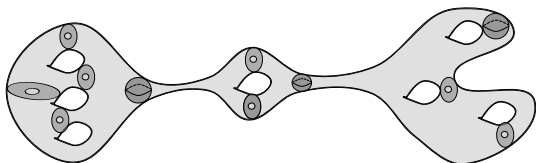
Nótese que una homotopía transversal  $h$  en  $\Sigma$ , induce una isotopía entre los respectivos levantamientos canónicos  $\widehat{h}_0$  y  $\widehat{h}_1$ ,

$$\widehat{h}: I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow PT(\Sigma) \text{ donde } \widehat{h}(t, s) = \left( h_t(s), \frac{\dot{h}_t(s)}{\|\dot{h}_t(s)\|} \right).$$

Si  $i_{\widehat{\gamma}}$  es la inclusión de  $\partial\mathcal{N}_{\widehat{\gamma}}$  en  $M_{\widehat{\gamma}}$ ,  $\text{Ker}(H_1(i_{\widehat{\gamma}}))$  se genera por un múltiplo de la clase del meridiano  $m_{\widehat{\gamma}}$  en  $H_1(\partial\mathcal{N}_{\widehat{\gamma}}; \mathbb{R})$ .

# Geometría de 3-variedades

PERELMAN-THURSTON: Toda 3-variedad compacta con frontera (posiblemente vacía) una colección finita de toros, tiene una descomposición canónica en piezas geométricas.



Modelos geométricos de las 3-variedades

$\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ , *Sol* and *Nil*.

# Estructuras geométricas

Sea  $X$  una variedad y  $G$  un grupo que actúa sobre  $X$ . Decimos que una variedad  $M$  tiene una **estructura**  $(G, X)$  si para cada punto  $x \in M$ , existe una carta  $(U, \varphi)$ , es decir, una vecindad  $U \subset M$  de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset X$ . Las cartas satisfacen lo siguiente:

si dos gráficos  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  se superponen, entonces el mapa de transición o el mapa de cambio de coordenadas

$$\gamma = \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

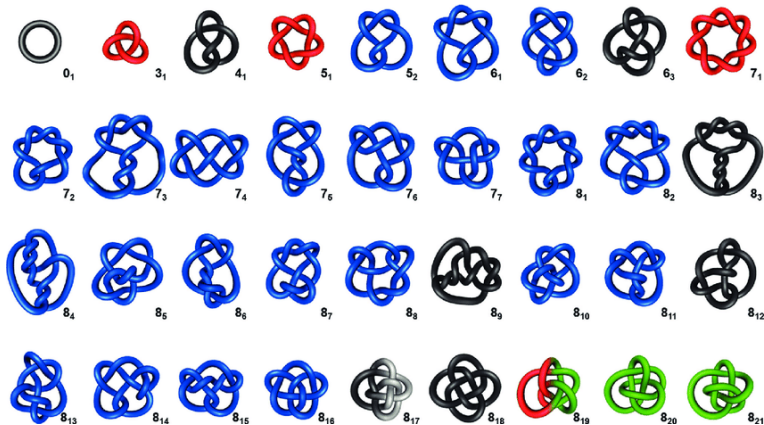
es un elemento de  $G$ .

Aquí,  $X$  será simplemente conexo y  $G$  será un grupo de difeomorfismos analíticos reales que actúan transitivamente sobre  $X$ .

**Ejemplo:** El toro admite una estructura  $(\text{Isom}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ , también llamada estructura **euclidiana**. Pero también admite una estructura **afín**, cuando  $G$  sea el grupo afín  $(x \rightarrow Ax + b)$  que actúa sobre  $\mathbb{R}^2$ .

# Casi toda 3-variedad es hiperbólica

HOSTE-THISTLETHWAITE-WEEKS: De los 354, 154, 254 distintos nudos primos con a lo más 19 cruces, todos excepto 394 son hiperbólicos



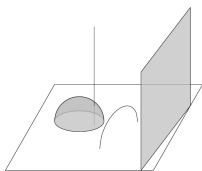
# 3-variedades hiperbólicas

Recordemos

$$\mathbb{H}^3 := \{(x + yi, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{y} \quad \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$



Geodésicas: líneas verticales, semicírculos que intersectan a  $\partial\mathbb{H}^3$  con un ángulo recto.  
 $Isom_+(\mathbb{H}^3) \cong PSL_2(\mathbb{C})$  y la acción en  $\partial\mathbb{H}^3$  es via transformaciones de Möbius.

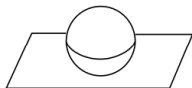
## Definition

Una 3-variedad  $M$  es **hiperbólica** si admite una  $(Isom_+(\mathbb{H}^3) = PSL_2(\mathbb{C}), \mathbb{H}^3)$ -estructura.



## Isometrías y horoesferas

Sea  $p$  un punto en  $\partial\mathbb{H}^3$ . Una **horoesfera** centrada en  $p$  es una hipersuperficie completa conexa ortogonal a todas las líneas que salen de  $p$ . Note que, una horoesfera alrededor de  $\infty$  en  $\partial\mathbb{H}^3$  es un plano paralelo a  $\mathbb{C}$ , que consta de puntos  $\{(x + iy, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\}$  donde  $c > 0$  es constante.

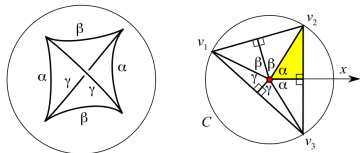


Sea  $\phi$  una isometría no trivial de  $\mathbb{H}^3$ . Precisamente se cumple uno de los siguientes:

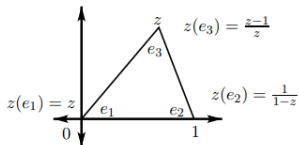
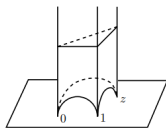
- $\phi$  tiene al menos un punto fijo en  $\mathbb{H}^3$  (**elíptica**, es conjugada a  $z \rightarrow e^{2\theta i} z$ , rotación a lo largo de una geodésica).
- $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}^3$  y tiene exactamente uno en  $\partial\mathbb{H}^3$  (**parabólica**, es conjugada a  $z \rightarrow 1 + z$ , translación Euclideana en una Horoesfera).
- $\phi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}^3$  y tiene exactamente dos en  $\partial\mathbb{H}^3$  (**loxodrómica**, es conjugada a  $z \rightarrow \rho^2 z$  con  $|\rho| > 1$ , dilata y rota a lo largo de una geodésica).

# Tetraedro ideal

Un tetraedro ideal en  $\mathbb{H}^3$  es la envolvente convexa de cuatro puntos ideales no forman un cuadrilátero cíclico en  $\partial\mathbb{H}^3$ .



- Dos lados opuestos tienen ángulos diedrales iguales.
- Tenemos que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , porque una horoesfera basada en un vértice interseca en un triángulo Euclideo.
- Clase de isometría esta determinada por sus tres ángulos diedrales o equivalentemente su un n'mero complejo (invariante de arista):



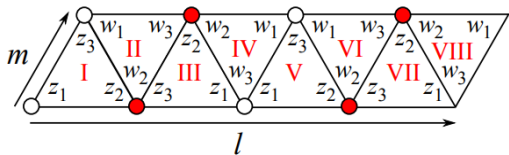
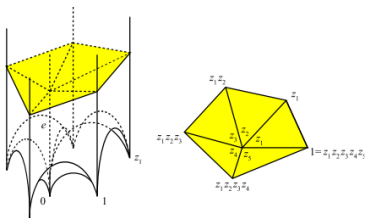
De ahora en adelante  $M^3$  admite una triangulación ideal topológica  $\mathcal{T}$  tal que cada tetraedro admite una estructura hiperbólica.

### Theorem (Ecuaciones de pegado)

La estructura hiperbólica en los tetraedros ideales induce una estructura hiperbólica al pegar los tetraedros, si y sólo si para cada arista  $e$ ,

$$\prod z(e_i) = 1 \quad \text{and} \quad \sum \arg(z(e_i)) = 2\pi,$$

donde el producto y suma es sobre todas las aristas que se identifican a  $e$ .

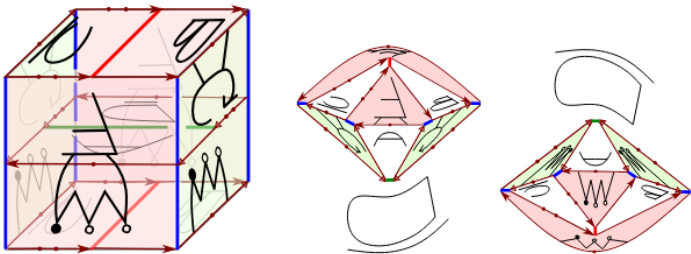


### Theorem (Ecuaciones de completitud)

La variedad hiperbólica  $M$  es completa, si y sólo si, la estructura inducida en cada cuspide es una estructura Eucladiana en el toro.

# Complemento del levantamiento canónico de una pareja de Farey

Dos octaedros ideales regulares (ángulos diédricos son rectos) identificando sus caras de la forma siguiente:



Más aún, las identificaciones se pueden realizar con isometrías hiperbólicas en  $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ .

# Hiperbolización de 3-variedades

## Theorem (Hiperbolización)

*Una 3-variedad compacta  $N$  admite una métrica hiperbólica completa, si y sólo si, es irreducible, atoroidal y tiene grupo fundamental infinito.*

## Theorem (Hiperbolización de $M_{\hat{\Gamma}}$ )

*$M_{\hat{\Gamma}}$  es hiperbólica de volumen finito  $\Leftrightarrow \Sigma \setminus \Gamma$  es una colección de discos ( $\Gamma$  rellena  $\Sigma$ ).*

Junto con Cremaschi probamos una generalización del Teorema anterior para levantamientos encajados en variedades de Seifert.

# Programa de Geometrización Efectiva

## Theorem (Teorema de Rigidez de Mostow)

*Sean  $M$  y  $N$  dos 3-variedades hiperbólicas completas de volumen finito. Si existe un isomorfismo  $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  entonces esta es inducida por una única isometría entre  $M$  y  $N$ .*

Todo invariante geométrico es un invariante topológico.

## Programa de Geometrización Efectiva de 3-variedades hiperbólicas

Encontrar estimaciones efectivas y computables de invariantes geométricos a partir de invariantes topológicos.

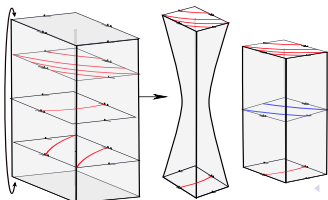
## Theorem (Cremaschi-R-Yarmola)

Para  $\Sigma_{1,1}$  y  $\Gamma$  una colección de geodésicas cerradas simples. Entonces en el orden cíclico de las componentes  $\widehat{\Gamma} = (\widehat{\gamma}_i)_{i=1}^n$  tenemos que,

$$\text{Vol}(M_{\widehat{\Gamma}}) \asymp \left( \sum_{i=1}^n d_{\mathcal{F}}(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \right).$$

Más aún, si  $\Gamma$  consiste de vecinos de Farey, entonces

$$\text{Vol}(M_{\widehat{\Gamma}}) = v_{\text{oct}} \left( \sum_{i=1}^n d_{\mathcal{F}}(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \right).$$



## Definition

Un grupo  $G$  es **aritmético** si es conjugado en  $PSL_2(\mathbb{C})$  a un grupo conmensurable a  $PSL_2(O_d)$ , donde  $O_d$  es el anillo de enteros en el campo imaginario cuadrático  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ , con  $d$  un entero positivo.

## Lemma (Neumann-Reid)

*Toda 3-variedad hiperbólica de volumen finito obtenida de pegar octaedros ideales regulares es aritmética.*

## Theorem (Pinsky-Purcell-R)

*Sea  $\Gamma$  una colección de geodésicas simples en  $\Sigma_{1,1}$  que son vecinos de Farey. Entonces  $M_{\hat{\Gamma}}$  es aritmética.*

## Corollary (Pinsky-Purcell-R)

*Hay una infinidad de levantamientos canónicos aritméticos.*





**Martelli, Bruno**

An Introduction to Geometric Topology  
*Createspace Independent Pub (2018).*



**Cremaschi, Tommaso, Rodríguez-Migueles, José Andrés and Yarmola, Andrew**

On volumes and filling collections of multicurves  
*Journal of Topology (2022).*



**Davis, Diana**

Lines in positive genus: A introduction to flat surfaces  
*European Mathematical Society (2016).*



**Do, Norman, On Hui, Connie and Purcell, Jessica**

Volume bounds for hyperbolic rod complements in the 3-torus  
*arXiv:2409.02357v2*



**Pinsky, Tali, Purcell, Jessica and Rodríguez-Migueles, José Andrés**

Arithmetic modular links  
*Pacific Journal of Mathematics (2023)*



**Purcell, Jessica**

Hyperbolic knot theory  
*American Mathematical Society (2020)*



**Rodríguez-Migueles, José Andrés**

Geometry and topology of closed geodesics complements in the 3-torus  
*arXiv:2412.03838v1*