Polinomios de gráficas listón y descomposiciones de Heegaard de 3-variedades

Escuela Fico González Acuña de nudos y 3-variedades 2024

José Frías

Facultad de Ciencias, UNAM

6 de diciembre de 2024

1. Introducción

Motivación

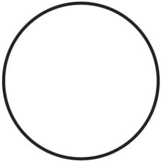
[1] Davies, A. et al. **Nature** 600, 70–74 (2021).
"Advancing mathematics by guiding human intuition with AI".

Mark Lackenby: *"I was very struck at just how useful the machine-learning tools could be as a guide for intuition."*
Jeffrey Weeks: *"Getting the computer to seek out patterns takes the research process to a qualitatively different level."*

1.0. Teoría de Nudos

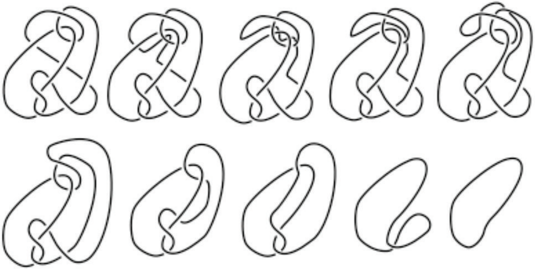
Definición

Un **nudo** *es un encaje (suave o lineal por pedazos)* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ *(a veces se consideran encajados en* $\mathbb{S}^3$*).*



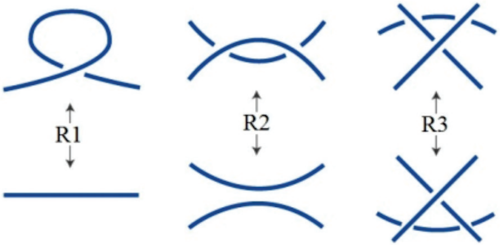
Definición

Dos nudos K_1 y K_2 son **equivalentes** *si existe una isotopía de ambiente en $\mathbb{R}^3$ que lleva a K_1 en K_2.*



Teorema

Dos nudos K_1 y K_2 representados por diagramas D_1 y D_2 son **equivalentes** *si existe una sucesión finita de movidas de Reidemeister que llevan D_1 en D_2.*



Invariantes de nudos

Binarios: alternancia, hiperbolicidad.

Numéricos: número de cruces, número de puentes, signatura.

Geométricos: exterior, volumen, pendiente natural.

Polinomiales: Alexander, Jones, HOMPFLY.

Homológicos: homología de Khovanov, homología de Floer.

Invariantes polinomiales de nudos

Polinomio de Alexander

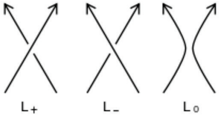
- Propuesto por J. W. Alexander en 1923, como el generador de un ideal principal de un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-módulo obtenido a partir de la cubierta cíclica infinita del exterior del nudo.
- Es un polinomio de Laurent simétrico en una variable y se denota como $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Polinomio de Jones

- Introducido por V. Jones en 1984, como una traza de una representación del grupos de trenzas en un álgebra (en ciertos modelos físicos).
- A cada nudo o enlace orientado K le asocia un polinomio de Laurent en la variable $t^{1/2}$, que se denota por $V_K(t)$.

Relaciones de Madeja (Skein relations)

L_0, L_+ y L_- son tres diagramas de nudos o enlaces orientados que difieren en un cruce por:



Polinomio de Jones

(i) $V_\circ(t) = 1$

(ii) $(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) = t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t)$

Polinomio de Alexander-Conway

(i) $\nabla_\circ(z) = 0$

(ii) $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$

Tablas de Nudos

Con el uso de invariantes más sofisticados y un creciente poder de cómputo se cuenta con tablas cada vez más extensas de nudos primos, incluyendo algunos invariantes (la tabla de Rolfsen, Knot Atlas por Bar Natan, KnotInfo por Cha-Livingston, etc.)

#C	0	3	4	5	6	7	8	9	10
#PK	1	1	1	2	3	7	21	49	165

#C	11	12	13	14	15
#PK	552	2,176	9,988	46,972	253,293

#C	16	17	18	19
#PK	1,388,705	8,053,393	48,266,466	294,130,458

Legend: Number of Crossings denoted by #C and number of Prime Knots dentoted by #PK

1.1 PCA en el estudio del polinomio de Jones
(R. Sazdanovic, J. Levitt, M. Hajij)

Dataset asociado al polinomio de Jones

Se convierte el polinomio de Jones de cada nudo K, $J(K) = V_K(q)$, a un vector de coeficientes en $\mathbb{R}^n$ alineados con relación a q^0.

K	$J(K)$	q^0
0_1	1	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
$\mathrm{mir}(3_1)$	$q+q^3-q^4$	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0, 0)
4_1	$q^{-2}-q^{-1}+1-q+q^2$	(0, 1, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
$\mathrm{mir}(5_1)$	$q^2+q^4-q^5+q^6-q^7$	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, -1, 1, -1)
$\mathrm{mir}(5_2)$	$q-q^2+2q^3-q^4+q^5-q^6$	(0, 0, 0, 0, 1, -1, 2, -1, 1, -1, 0)
$\mathrm{mir}(6_1)$	$q^{-2}-q^{-1}+2-2q+q^2-q^3+q^4$	(0, 1, -1, 2, -2, 1, -1, 1, 0, 0, 0)
$\mathrm{mir}(6_2)$	$q^{-1}-1+2q-2q^2+2q^3-2q^4+q^5$	(0, 0, 1, -1, 2, -2, 2, -2, 1, 0, 0)
6_3	$-q^{-3}+2q^{-2}-2q^{-1}+3-2q+2q^2-q^3$	(-1, 2, -2, 3, -2, 2, -1, 0, 0, 0, 0)

La nube de puntos $X \subset \mathbb{R}^n$ para el análisis serán los vectores de coeficientes de los polinomios de Jones de los 9,755,329 nudos con a lo más 17 cruces, con la métrica l_2. Consideremos las filtraciones en X:

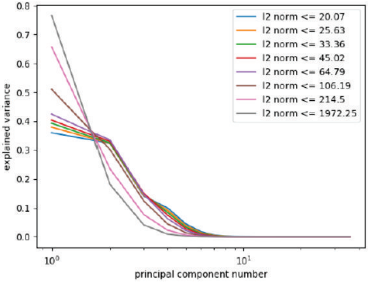
- Sea $\mathcal{F}_{[k]}$ los vectores de coeficientes de polinomios de Jones de nudos con a lo más k cruces. La **filtración por cruces** de X es:

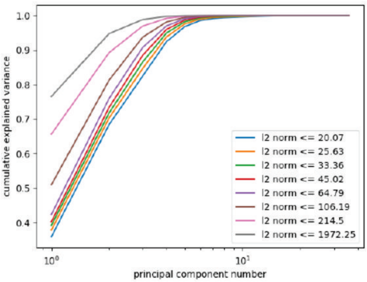
$$\mathcal{F}_{[3]} \subset \mathcal{F}_{[4]} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{[17]} = X$$

- Sean $0 < r_7 < r_6 < \cdots < r_0$ tales que $\mathcal{F}_{r_i} \subset X$ son los puntos de norma acotada por r_i y tiene cardinalidad $|X|/2^i$. La **filtración por norma** de X es:

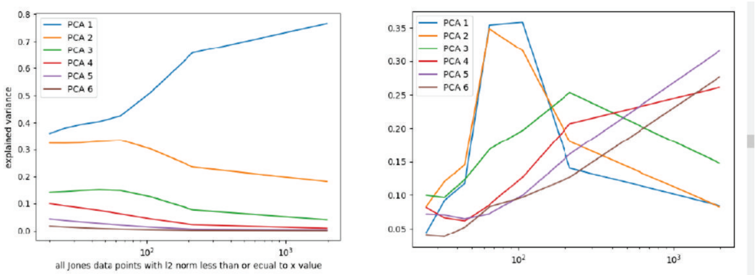
$$\mathcal{F}_{r_7} \subset \mathcal{F}_{r_6} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{r_0} = X$$

PCA en la filtración por norma



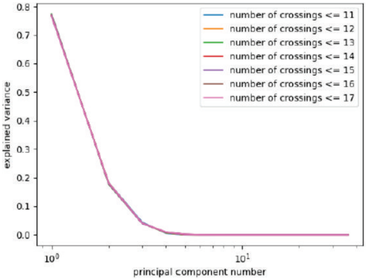


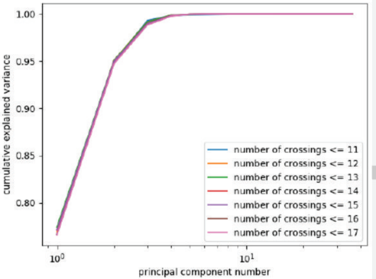
Izquierda: num. de componente principal vs. factor de varianza normalizado.
Derecha: num. de componente principal vs. acumulado de factores de varianza normalizados.
Observación: Para r_0 el acumulado $S_3 > 0.988$, luego X "aproxima" a una 3-variedad.



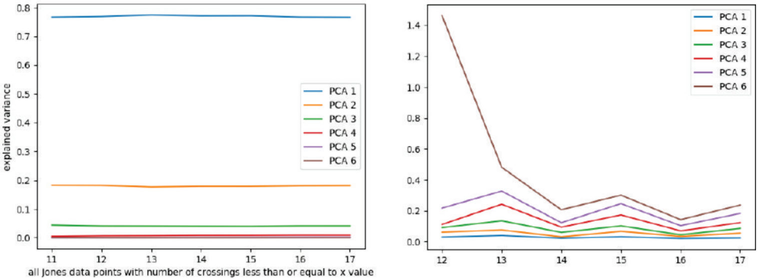
Izquierda radio de la filtración vs. factor de varianza normalizado.
Derecha: radio de la filtración vs variación de la componente principal (radianes).
Observación: Las tres primeras componentes principales tienden a estabilizarse al incrementar el radio de la filtración.

PCA en la filtración por cruces





Izquierda: num. de componente principal vs factor de varianza normalizado.
Derecha: num. de componente principal vs acumulado de factores de varianza normalizados.
Observación:¿?



Izquierda: número de cruces vs. factor de varianza normalizado.
Derecha: número de cruces vs. variación de la componente principal (radianes).
Observación:¿Qué explica esa aparente periodicidad en la variación de las componentes principales?

1.2 Ball Mapper y la relación de los polinomios de Jones y Alexander con la signatura

(R. Sazdanovic, P. Dlotko)

Teorema (Garoufalidis 2003)

Para todos los nudos simples de hasta 8 cruces y nudos toroidales, el polinomio de Jones coloreado determina la signatura del nudo

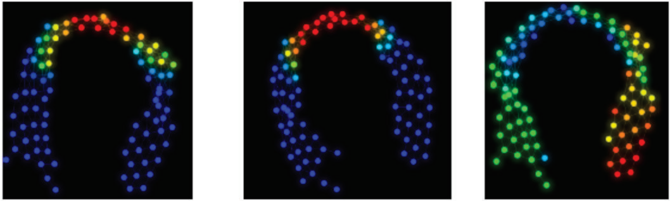
Conjetura

El polinomio de Jones coloreado $J_{N,q}(K)$ de un nudo simple K determina $\sigma(K)$.

Folklore: El polinomio de Jones determina la signatura pero el polinomio de Alexander no.

Polinomio de Alexander

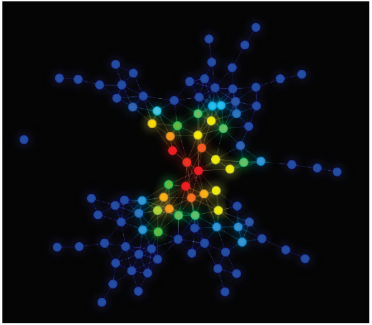
Análisis exploratorio de la gráfica BM de los datos del polinomio de Alexander de nudos con hasta 17 cruces.



(A) Crossing number (B) Alt vs. non-alt (C) signature

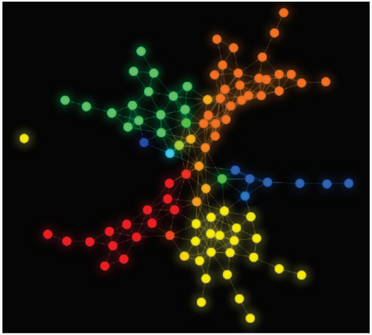
Polinomio de Jones

Gráfica BM de los datos del polinomio de Jones de nudos de hasta 17 cruces coloreada por número de cruces.



Polinomio de Jones

Gráfica BM de los datos del polinomio de Jones coloreada por valor de signatura.



1.3 AI en el estudio de la relación entre invariantes hiperbólicos y la signatura

(A. Davies / DeepMind, M. Lackenby, A. Juhász)

[1] Davies, A. et al. **Nature** 600, 70–74 (2021).
Advancing mathematics by guiding human intuition with AI.

Conjetura (Conjetura del volumen)

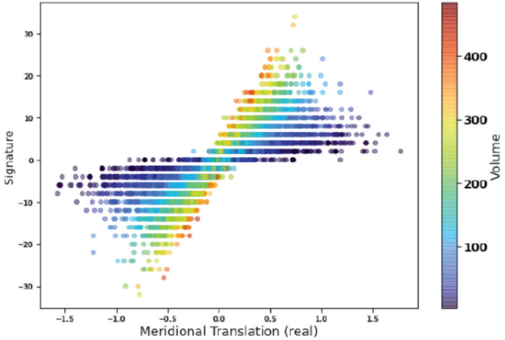
Sea $K \subset \mathbb{S}^3$ un nudo hiperbólico. Entonces

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2\pi \log|\langle K\rangle_N|}{N} = vol(K), \quad \langle K\rangle_N = \lim_{q\to e^{2\pi i/N}} \frac{J_{K,N}(q)}{J_{0,N}(q)}$$

Conjetura

Existen constantes c_1 y c_2 tales que para todo nudo hiperbólico K se satisface:

$$|2\sigma(K) - slope(K)| < c_1 vol(K) + c_2$$



Teorema

Existe una constante c tal que para todo nudo hiperbólico K se satisface:

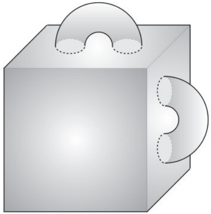
$$|2\sigma(K) - slope(K)| < c \cdot vol(K) \cdot inj(K)^{-3}$$

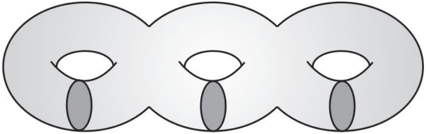
2. Polinomios de gráficas listón y el estudio de 3-variedades

2.1 Gráficas de Heegaard

Definición

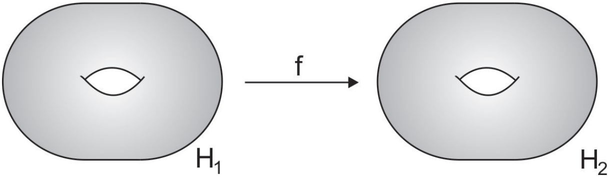
Un **cubo con** n **asas** M *es una 3-variedad compacta, conexa, orientable con* $\partial M \neq \emptyset$ *que contiene n discos* $D_1, \ldots, D_n$ *propiamente encajados y ajenos por pares tales que* $M | \cup_i D_i$ *es homeorfo a una 3-bola.*





Descomposiciones de Heegaard

Sean H_1 y H_2 dos cubos con asas de género n y sea $f : \partial H_1 \to \partial H_2$ un homeomorfismo que invierte orientación. Construimos la 3-variedad compacta y orientable $M = H_1 \cup_f H_2$ obtenida a partir de $H_1 \sqcup H_2$ al tomar el cociente dado por $x \sim f(x)$ para cada $x \in \partial H_1$.



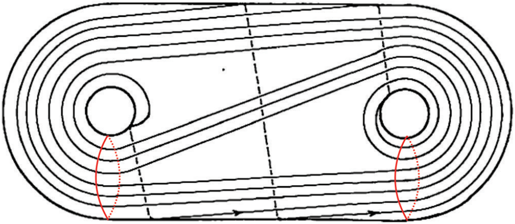
A la factorización $M = H_1 \cup_f H_2$ le llamamos una **descomposición de Heegaard** de M de género n.

Teorema

Sea M una 3- variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera (triangulable/Moise). Entonces M tiene una descomposición de Heegaard.

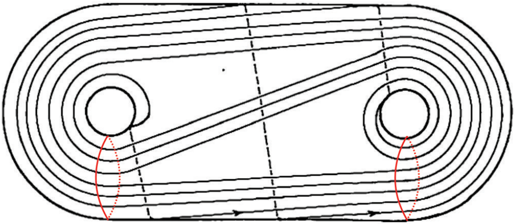
Diagrama de Heegaard

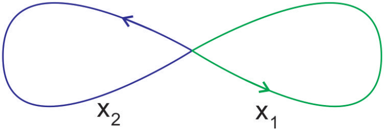
Sea $M = H_1 \cup_f H_2$ una descomposición de Heegaard de género n y sea $\Sigma = \partial H_1 = \partial H_2$. Sea $\{D_1, \ldots, D_n\}$ y $\{D'_1, \ldots, D'_n\}$ familias de discos propiamente encajados que descomponen a H_1 y H_2, respectivamente, en 3-bolas. Sean $A = \{\alpha_i = f(\partial D_i)\}$ y $B = \{\beta_i = \partial D'_i\}$ dos familias de g curvas en Σ. A la terna (Σ, A, B) le llamamos un **diagrama de Heegaard** de M.



Grupo Fundamental

Sea M la 3-variedad que tiene el siguiente diagrama de Heegaard:





Entonces $\pi_1(M) = \langle x_1, x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}, x_1x_2x_1^{-2}x_2x_1x_2^{-1} \rangle$ por el Teorema de Seifert-Van Kampen.

2.2 Polinomios de gráficas listón

Definición

Sea F una superficie c.c.s. Una gráfica $G \subset F$ se dice **encajada celularmente** *si cada componente en $F \setminus G$ es homeomorfa a un disco.*

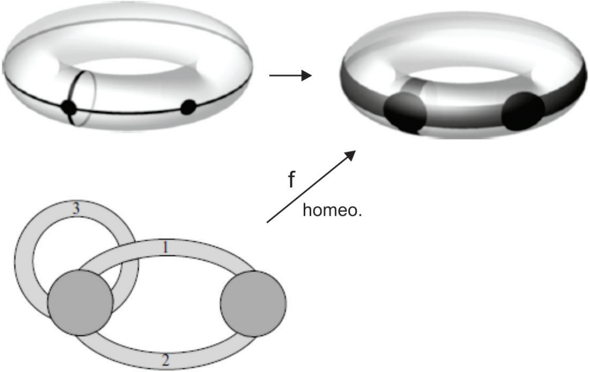
Definición

Una superficie compacta y con frontera, F, se dice una **gráfica listón** *si admite una desomposición en asas comenzando por una familia de 0-asas $v_1, v_2 \ldots, v_m$ y una familia de 1-asas $e_1, \ldots, e_n$ 'pegadas' a las 0-asas a lo largo de arcos disjuntos en $\bigcup \partial v_i$.*

Definición

Dos gráficas celularmente encajadas $G_1 \subset F_1$ y $G_2 \subset F_2$ en superficies c.c.o.s. F_1 y F_2 son isomorfas como gráficas encajadas celularmente si existe un homeomorfismo $\varphi : F_1 \to F_2$ tal que su restricción es un isomorfismo de gráficas entre G_1 y G_2.

Gráficas encajadas celularmente en superficies y gráficas listón



El polinomio de Tutte

Definición

Sea G una gráfica finita. El **polinomio de Tutte**, $T(G;x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$, *se define como:*

$$T(G;x,y) = \sum_{\substack{E(A)\subseteq E(G)\\ V(A)=V(G)}} (x-1)^{k(A)-k(G)}(y-1)^{k(A)+e(A)-v(G)}$$

donde:
$e(G) := \sharp$ *de aristas de* G.
$v(G) := \sharp$ *de vértices de* G.
$k(G) := \sharp$ *componentes conexas de* G.

Propiedades:

- Introducido por Tutte en 1954 y generaliza a los polinomios crómatico y de flujo en gráficas.
- Codifica el número de árboles maximales de una gráfica conexa.

El polinomio de Penrose

Definición

Sea G una gráfica encajada celularmente en una superficie F y sea G_m la gráfica medial de G. El **polinomio de Penrose**, $P(G;\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$, *se define como:*

$$P(G;\lambda) = \sum_{s \in \mathcal{P}(G_m)} (-1)^{cr(s)} \lambda^{c(s)}$$

donde:

$\mathcal{P}(G_m) =$ *conjunto de estados de Penrose de* G_m.

$cr(s) := \sharp$ *resoluciones tipo cruce del estado* s.

$c(s) := \sharp$ *componentes de frontera del estado* s.

Propiedades:

- Introducido por Penrose en 1971 y extendido en 2013 por Ellis-Monaghan y Moffat para gráficas en superficies.
- Está relacionado con el número de coloraciones de la gráfica.

El polinomio listón (Bollobás-Riordan)

Definición

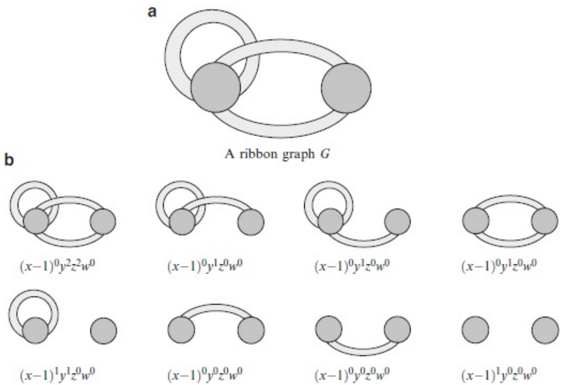
Sea G una gráfica listón encajada en una superficie c.c.s. El **polinomio listón**, $R(G; x, y, z, w) \in \mathbb{Z}[x, y, z, w]/w^2 - w$, *se define como:*

$$R(G; x, y, z, w) = \sum_{\substack{E(A) \subseteq E(G) \\ V(A) = V(G)}} (x-1)^{r(G)-r(A)} y^{n(A)} z^{k(A)-f(A)+n(A)} w^{t(A)}$$

donde:

$e(G) := \sharp$ *de aristas de* G.
$v(G) := \sharp$ *de vértices de* G.
$f(G) := \sharp$ *componentes de frontera de* G.
$k(G) := \sharp$ *componentes conexas de* G.
$r(G) := v(G) - k(G)$
$n(G) := e(G) - r(G)$
$t(G) := 0$ *si* G *es orientable y* 1 *si no lo es.*

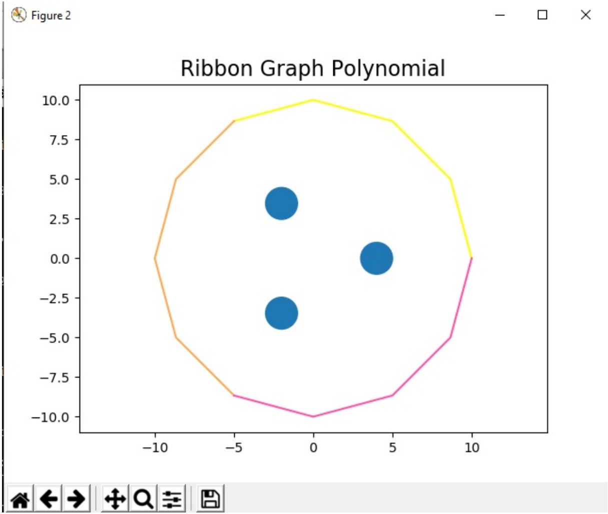
Ejemplo de cálculo del polinomio listón



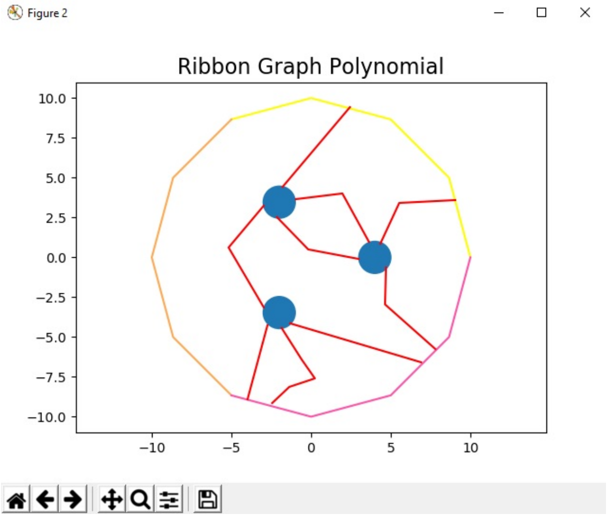
Computing the ribbon graph polynomial of G, $R(G;x,y,z,w) = y^2z^2 + xy + 2y + x + 1$

Complejidad: Una gráfica listón G tiene $2^{|E(G)|}$ estados (el conjunto potencia de $E(G)$).

Programa para el cálculo del polinomio listón



Programa para el cálculo del polinomio listón



2.3 Construcción de las bases de datos (intento 1)

Polinomio listón

L(3,1): 6*x + y**4*z**2 + 6*y**3*z**2 + 12*y**2*z**2 + 3*y**2 + 3*y*(x - 1) + 20*y + (x - 1)**2 + 6
L(3,2): 6*x + y**4*z**2 + 6*y**3*z**2 + 12*y**2*z**2 + 3*y**2 + 3*y*(x - 1) + 20*y + (x - 1)**2 + 6
L(5,1): 80*x + y**6*z**2 + 10*y**5*z**2 + 40*y**4*z**2 + 5*y**4 + 80*y**3*z**2 + 10*y**3*(x - 1) + 40*y**3 + 80*y**2*z**2 + 10*y**2*(x - 1)**2 + 60*y**2*(x - 1) + 120*y**2 + 5*y*(x - 1)**3 + 40*y*(x - 1)**2 + 120*y*(x - 1) + 192*y + (x - 1)**4 + 10*(x - 1)**3 + 40*(x - 1)**2
L(5,2): 110*x + y**6*z**2 + 10*y**5*z**2 + 45*y**4*z**2 + 5*y**3*z**2*(x - 1) + 110*y**3*z**2 + 10*y**3 + 20*y**2*z**2*(x - 1) + 125*y**2*z**2 + 10*y**2*(x - 1) + 80*y**2 + 10*y*(x - 1)**2 + 85*y*(x - 1) + 222*y + (x - 1)**4 + 10*(x - 1)**3 + 45*(x - 1)**2 + 15
L(5,3): 110*x + y**6*z**2 + 10*y**5*z**2 + 45*y**4*z**2 + 5*y**3*z**2*(x - 1) + 110*y**3*z**2 + 10*y**3 + 20*y**2*z**2*(x - 1) + 125*y**2*z**2 + 10*y**2*(x - 1) + 80*y**2 + 10*y*(x - 1)**2 + 85*y*(x - 1) + 222*y + (x - 1)**4 + 10*(x - 1)**3 + 45*(x - 1)**2 + 15
L(5,4): 80*x + y**6*z**2 + 10*y**5*z**2 + 40*y**4*z**2 + 5*y**4 + 80*y**3*z**2 + 10*y**3*(x - 1) + 40*y**3 + 80*y**2*z**2 + 10*y**2*(x - 1)**2 + 60*y**2*(x - 1) + 120*y**2 + 5*y*(x - 1)**3 + 40*y*(x - 1)**2 + 120*y*(x - 1) + 192*y + (x - 1)**4 + 10*(x - 1)**3 + 40*(x - 1)**2

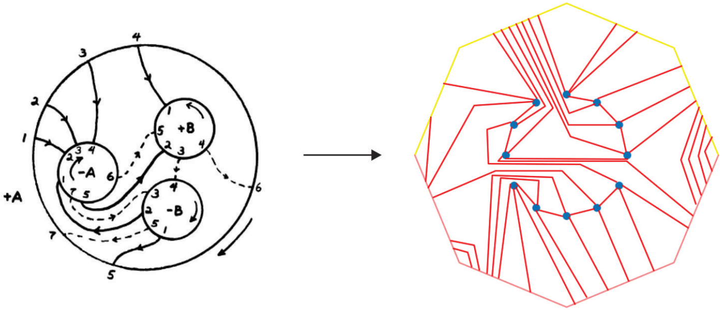
Polinomio de Tutte

L(3, 1): y**4 + 2*y**3 + x**2 + 3*x*y + 3*y**2 + x + y
L(4, 1):y**5 + 3*y**4 + x**3 + 4*x**2*y + 6*x*y**2 + 6*y**3 + x**2 + 4*x*y + 4*y**2 + x + y
L(5, 1):y**6 + 4*y**5 + x**4 + 5*x**3*y + 10*x**2*y**2 + 10*x*y**3 + 10*y**4 + x**3 + 5*x**2*y + 10*x*y**2 + 10*y**3 + x**2 + 5*x*y + 5*y**2 + x + y
L(5, 2): y**6 + 4*y**5 + x**4 + 5*x*y**3 + 10*y**4 + 6*x**3 + 10*x**2*y + 15*x*y**2 + 15*y**3 + 11*x**2 + 20*x*y + 15*y**2 + 6*x + 6*y
L(6, 1): y**7 + 5*y**6 + x**5 + 6*x**4*y + 15*x**3*y**2 + 20*x**2*y**3 + 15*x*y**4 + 15*y**5 + x**4 + 6*x**3*y + 15*x**2*y**2 + 20*x*y**3 + 20*y**4 + x**3 + 6*x**2*y + 15*x*y**2 + 15*y**3 + x**2 + 6*x*y + 6*y**2 + x + y

Polinomio de Penrose

L(3,1): z**4 + z**3 - 6*z**2 + 4*z
L(3,2): z**4 + z**3 - 6*z**2 + 4*z
L(4,1): z**6 - 8*z**5 + 39*z**4 - 88*z**3 + 88*z**2 - 32*z
L(4,3): z**6 - 8*z**5 + 39*z**4 - 88*z**3 + 88*z**2 - 32*z
L(5,1): z**6 + 21*z**5 - 110*z**4 + 200*z**3 - 160*z**2 + 48*z
L(5,2): z**5 - 10*z**4 + 45*z**3 - 64*z**2 + 28*z
L(5,3): z**5 - 10*z**4 + 45*z**3 - 64*z**2 + 28*z
L(6,1): z**8 - 12*z**7 + 123*z**6 - 532*z**5 + 1140*z**4 - 1312*z**3 + 784*z**2 - 192*z

Esfera homológica de Poincaré.



Tiene polinomio listón

414720*x + y**13*z**4 + 24*y**12*z**4 + 268*y**11*z**4 + 8*y**11*z**2 + 6*y**10*z**4*(x - 1) + 1844*y**10*z**4 + 13*y**10*z**2*(x - 1) + 180*y**10*z**2 + 110*y**9*z**4*(x - 1) + 8704*y**9*z**4 + 11*y**9*z**2*(x - 1)**2 + 270*y**9*z**2*(x - 1) + 1888*y**9*z**2 + 15*y**9 + 8*y**8*z**4*(x - 1)**2 + 908*y**8*z**4*(x - 1) + 29552*y**8*z**4 + 5*y**8*z**2*(x - 1)**3 + 222*y**8*z**2*(x - 1)**2 + 2652*y**8*z**2*(x - 1) + 12244*y**8*z**2 + 49*y**8*(x - 1) + 328*y**8 + 108*y**7*z**4*(x - 1)**2 + 4352*y**7*z**4*(x - 1) + 73088*y**7*z**4. . .

... + y**7*z**2*(x - 1)**4 + 108*y**7*z**2*(x - 1)**3 + 2127*y**7*z**2*(x - 1)**2 + 16174*y**7*z**2*(x - 1) + 54520*y**7*z**2 + 91*y**7*(x - 1)**2 + 1020*y**7*(x - 1) + 3368*y**7 + 8*y**6*z**4*(x - 1)**3 + 620*y**6*z**4*(x - 1)**2 + 12944*y**6*z**4*(x - 1) + 129024*y**6*z**4 + 30*y**6*z**2*(x - 1)**4 + 1086*y**6*z**2*(x - 1)**3 + 12536*y**6*z**2*(x - 1)**2 + 67212*y**6*z**2*(x - 1) + 173840*y**6*z**2 + 131*y**6*(x - 1)**3 + 1848*y**6*(x - 1)**2 + 10048*y**6*(x - 1) + 21464*y**6 + 48*y**5*z**4*(x - 1)**3 + 1736*y**5*z**4*(x - 1)**2 + 23008*y**5*z**4*(x - 1) + 150528*y**5*z**4 + 4*y**5*z**2*(x - 1)**5 + 390*y**5*z**2*(x - 1)**4 + 6560*y**5*z**2*(x - 1)**3 + 49104*y**5*z**2*(x - 1)**2 + 195140*y**5*z**2*(x - 1) + 398960*y**5*z**2 + 168*y**5*(x - 1)**4 + 2622*y**5*(x - 1)**3 + 17718*y**5*(x - 1)**2 + 61028*y**5*(x - 1) + 93448*y**5 + 96*y**4*z**4*(x - 1)**3 + 2112*y**4*z**4*(x - 1)**2 + 19648*y**4*z**4*(x - 1) + 90112*y**4*z**4 + 118*y**4*z**2*(x - 1)**5 + 2606*y**4*z**2*(x - 1)**4 + 24368*y**4*z**2*(x - 1)**3 + 126096*y**4*z**2*(x - 1)**2 + 384696*y**4*z**2*(x - 1) + 636576*y**4*z**2 + y**4*(x - 1)**7 + 16*y**4*(x - 1)**6 + 308*y**4*(x - 1)**5 + 3670*y**4*(x - 1)**4 + 25126*y**4*(x - 1)**3 + 103348*y**4*(x - 1)**2 + 248024*y**4*(x - 1) + 286528*y**4 + 36*y**3*z**2*(x - 1)**6 + 814*y**3*z**2*(x - 1)**5 + 8404*y**3*z**2*(x - 1)**4 + 50528*y**3*z**2*(x - 1)**3 + 192224*y**3*z**2*(x - 1)**2 + 464576*y**3*z**2*(x - 1) + 627520*y**3*z**2 + 4*y**3*(x - 1)**8 + 72*y**3*(x - 1)**7 + 763*y**3*(x - 1)**6 + 5942*y**3*(x - 1)**5 + 33922*y**3*(x - 1)**4 + 137752*y**3*(x - 1)**3 + 383192*y**3*(x - 1)**2 + 676640*y**3*(x - 1) + 611584*y**3 + 8*y**2*z**2*(x - 1)**7 + 156*y**2*z**2*(x - 1)**6 + 1584*y**2*z**2*(x - 1)**5 + 10224*y**2*z**2*(x - 1)**4 + 44288*y**2*z**2*(x - 1)**3 + 130432*y**2*z**2*(x - 1)**2 + 250880*y**2*z**2*(x - 1) + 262144*y**2*z**2 + 6*y**2*(x - 1)**9 + 120*y**2*(x - 1)**8 + 1204*y**2*(x - 1)**7 + 8084*y**2*(x - 1)**6 + 40007*y**2*(x - 1)**5 + 149964*y**2*(x - 1)**4 + 422248*y**2*(x - 1)**3 + 860944*y**2*(x - 1)**2 + 1171712*y**2*(x - 1) + 851968*y**2 + 4*y*(x - 1)**10 + 88*y*(x - 1)**9 + 928*y*(x - 1)**8 + 6256*y*(x - 1)**7 + 30164*y*(x - 1)**6 + 109616*y*(x - 1)**5 + 306296*y*(x - 1)**4 + 654912*y*(x - 1)**3 + 1037248*y*(x - 1)**2 + 1121792*y*(x - 1) + 656000*y + (x - 1)**11 + 24*(x - 1)**10 + 272*(x - 1)**9 + 1936*(x - 1)**8 + 9692*(x - 1)**7 + 36128*(x - 1)**6 + 103216*(x - 1)**5 + 228176*(x - 1)**4 + 386784*(x - 1)**3 + 485632*(x - 1)**2 - 226304

Tiene polinomio de Penrose

z**12 - 24*z**11 + 553*z**10 - 6186*z**9 + 42664*z**8 - 193904*z**7 + 595168*z**6 - 1238528*z**5 + 1718528*z**4 - 1518592*z**3 + 770816*z**2 - 170496*z

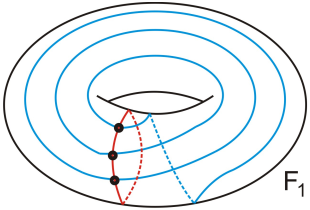
El caso de los espacios lente

Teorema (Clasificación de espacios lente)

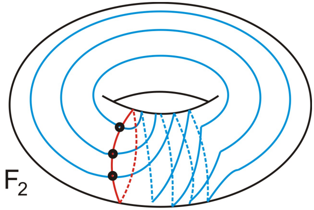
Los espacios lente $L(p, q)$ y $L(p', q')$ son homeomorfos si y solo si $p = p'$ y $q' \equiv \pm q^{\pm 1} (mod \;\; p)$.

Proposición

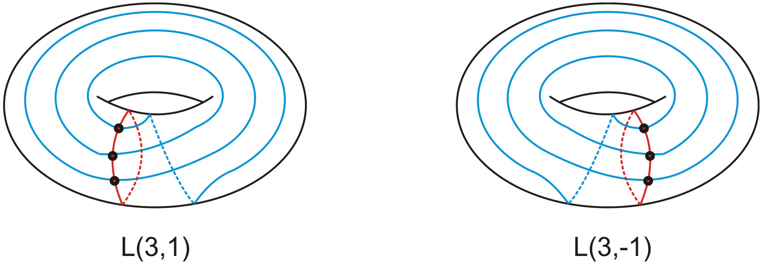
Si $L(p, q)$ y $L(p, q')$ son espacios lente homeomorfos, entonces las gráficas listón asociadas a dichos espacios lente son isomorfas.



L(3,1)

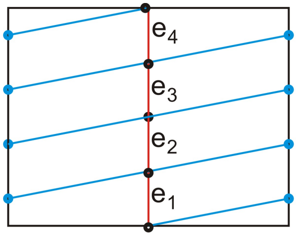


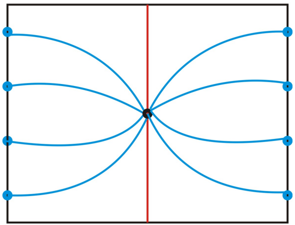
L(3,4)



Corolario

Si $L(p, q)$ y $L(p, q')$ son homeomorfos, entonces los polinomios de Tutte, (Penrose, listón) asociados dichos espacios son iguales. Es decir, los polinomios son invariantes de los espacios lente.





Lema

Si G es la gráfica de Heegaard asociada a $L(p,q)$, el coeficiente de la potencia máxima de la variable y en el polinomio de Tutte es 1 y su exponente es $p+1$.

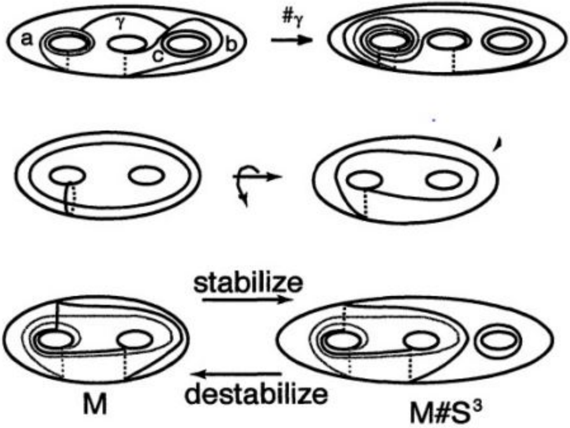
Proposición

Sea $P(G;\lambda)$ el polinomio de Penrose de la gáfica celularmente encajada en un toro correspondiente al espacio lente $L(p,q)$, entonces

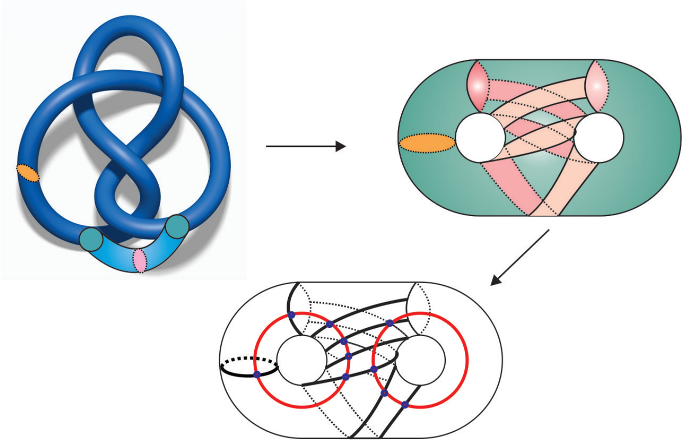
(i) $P(G;\lambda)(1) = 0$

(ii) $P(G;\lambda)(2) = 2^p$

De acuerdo al Teorema de Reidemeister-Singer, algunas operaciones importantes en diagramas de Heegaard que preservan la 3-variedad son: tomar la suma conexa de dos curvas en uno de los sistemas de curvas, giros de Dehn a lo largo de fronteras de discos meridianos y las estabilizaciones/desestabilizaciones. ¿Cómo se comportan estas operaciones con los polinomios?



Construcción de gráficas de Heegaard de género dos

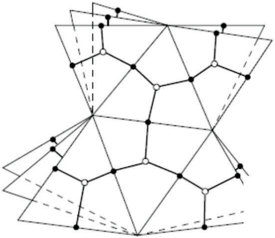


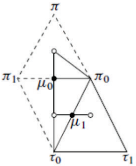
Lema

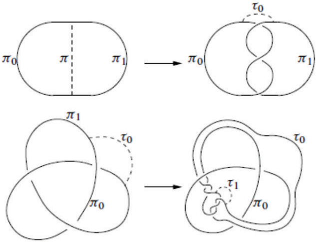
Las gráficas de Heegaard de género dos de $\mathbb{S}^3$ obtenidas de túneles de nudos están encajadas celularmente en la superficie de Heegaard.

El árbol de túneles de nudos

[1] S. Cho, D. McCullough, *The tree of knot tunnels*, Geometry and Topology 13(2) (2006), 625-648.







¡MUCHAS GRACIAS!