

JSJ de exteriores de cubos con asas
anudados de género 2
Escuela FICO González Acuña
de Nudos y 3-variedades

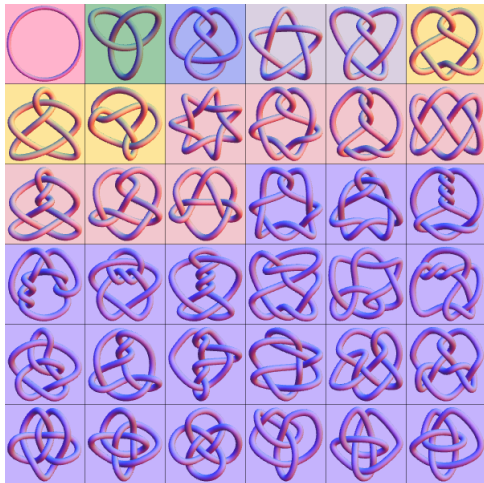
Luis Celso Chan Palomo
FMAT-UADY

December 5, 2024

Motivación 1

Pregunta

Qué otras cosas anudadas estudian los nudistas?



Pregunta

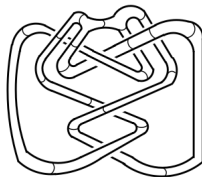
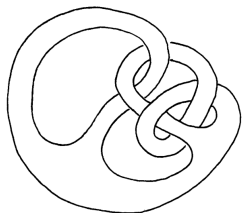
El siguiente objeto tridimensional es un nudo?

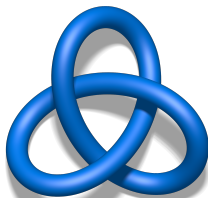
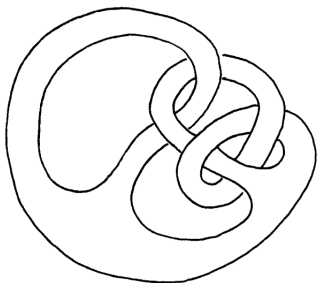


Cubos con asas

Definición

Un **cubo con asas** H es una 3-variedad compacta orientable que contiene una colección disjunta de **discos esenciales** tal que la variedad que se obtiene al cortar por los discos es una 3-bola. El **género de H** se define como el género de la superficie de su frontera. Un cubo con asas de género g encajado en la 3-esfera S^3 se denomina **cubo con asas anudado** de género g y se denota (S^3, H) .





Si $g = 1$ el estudio de los cubos con asas anudados coincide con la teoría clásica de nudos.

Nota

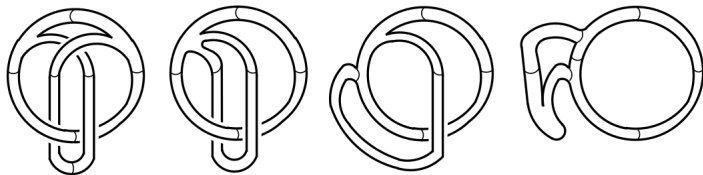
En esta plática estamos interesados en cubos con asas anudados de género 2.

Equivalencia

Definición

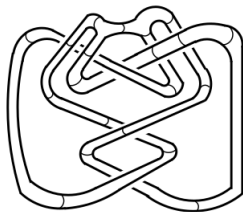
*Dos cubos con asas anudados en S^3 son **equivalentes** si son ambiente isotópicos en S^3 (deformación continua de uno en el otro).*

Ejemplo



Definición

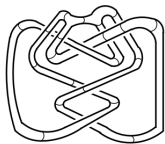
Un cubo con asas es *trivial* si es equivalente al cubo con asas estandar en S^3 .



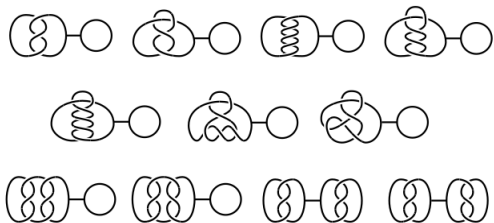
Pregunta

Son equivalentes? Si no lo son, cómo probarlo?

Convención

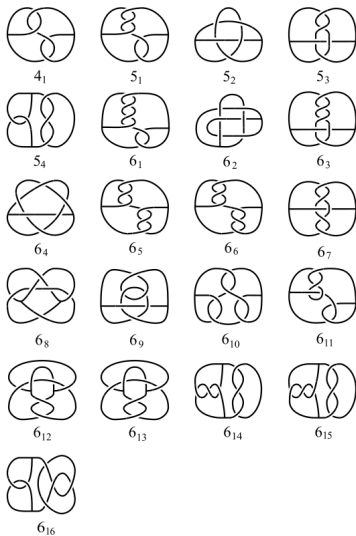


Ejemplo



H reducibles: existe una esfera S tal que $H \cap S = D$ disco esencial en H .

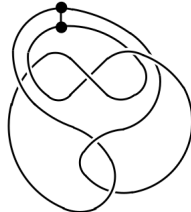
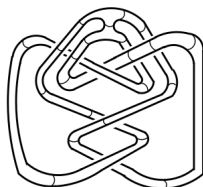
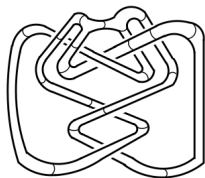
Ejemplos: irreducibles



Kinoshita

Lema

Los siguientes cubos con asas **no** son equivalentes.



Exteriores de cubos con asas

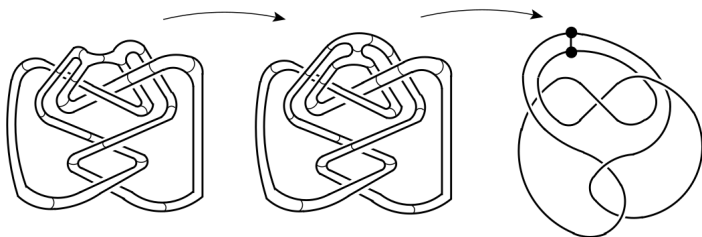
Definición

Sea H un cubo con asas. Se define el *exterior* de H como $E(H) = \overline{S^3 - H}$.

Nota

El exterior de un cubo con asas no es otro cubo con asas necesariamente.

Ejemplo

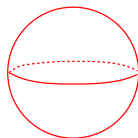


Exteriores de cubos con asas

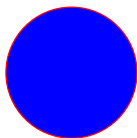
Definición

Sea H un cubo con asas. Se define el *exterior* de H como $E(H) = \overline{S^3} - H$.

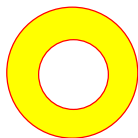
Estamos interesados en exteriores que **no contengan esferas, discos y toros esenciales**. “Muy restrictivo”?



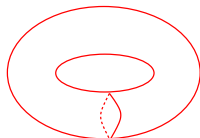
S



D



A



T

Pregunta

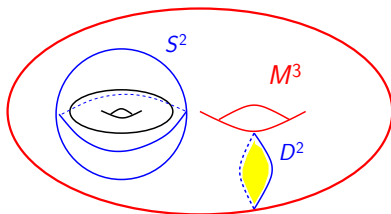
Porqué? Qué es eso?

Superficies esenciales

Definición

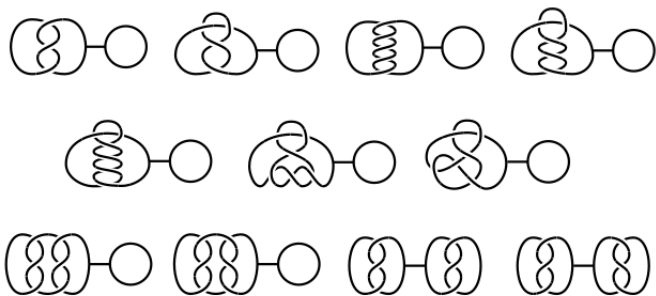
Una superficie F propiamente encajada en M^3 se denomina **esencial** si:

- ▶ $F \cong S^2$ y F no acota una B^3 en M (*reducible*);
- ▶ $F \cong D^2$ y ∂F es esencial en ∂M (*∂ -reducible*);
- ▶ $F \not\cong S^2$ o D^2 y es *incompresible* y *∂ -incompresible*.



Nota

Los siguientes ejemplos de exteriores $E(H) = \overline{S^3 - H}$ contienen un *disco* y un *toro esencial*:



Nota

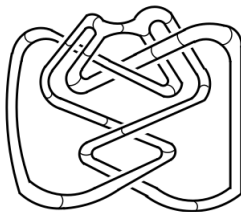
Si H un cubo con asas de género 2 encajado en S^3 entonces $E(H)$ es *irreducible*: no contienen una *esfera esencial*.

Motivación 2: Kinoshita

Nota

Estamos interesados en exteriores que *no contengan esferas, discos y toros esenciales*. “Muy restrictivo”?

Ejemplo

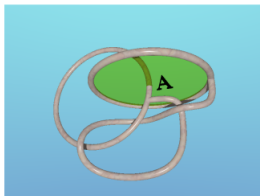


Teorema (Thurston)

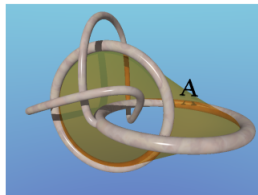
$E(H)$ es hiperbólico.

Anillos esenciales en exteriores

Ejemplo



(a) Λ_{HK} of $(S^3, 5_1)$: $(h_1) \circ$.



(b) Λ_{HK} of $(S^3, 6_4)$: $(l_{(1,1)}) \circ$.

FIGURE 1.1. Annulus diagrams.

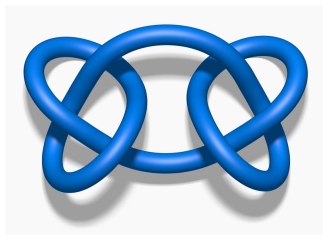
Anillos esenciales en exteriores de nudos

Lema

Sea k un *nudo* en S^3 . Si $E(K)$ contiene un *anillo esencial* A , entonces exactamente un de los siguientes casos sucede:

1. K es un nudo *toroidal* o nudo *cable* y A es el anillo de cableado;
2. K es un nudo *compuesto* y A se puede extender a una esfera que descompone K .

En nudos solo hay **2 tipos** y solo pueden ser finitos, pero en cubos con asas **NO: 10 tipos** y pueden ser infinitos.



Clasificación de anillos de Koda-Ozawa: $H = V$

Superficies esenciales con Euler no negativa en $E(V)$ son más complicadas que en nudos.

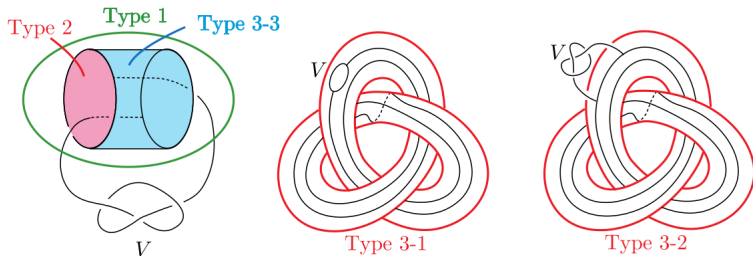
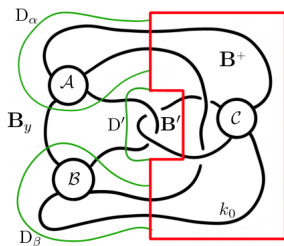


FIGURE 10. Essential annuli.

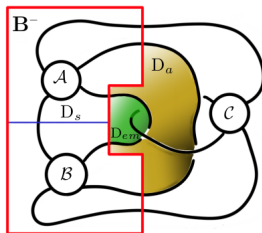
Teorema (Koda-Ozawa-2014)

Cada *anillo esencial* en el exterior de un cubo con asas de género 2 es alguno de los 4 tipos: *pendiente Type 4*

Type 4: Nudos Eudave-Muñoz



(a) Essential annuli in $E(HK^+)$.



(b) Essential annuli in $E(HK^-)$.

Teorema

Anillos esenciales *type 4-1* son no-característicos.

Nota

El anillo esencial A es *Type 4-2* si $E(V)$ es *toroidal* (contiene un toro esencial).

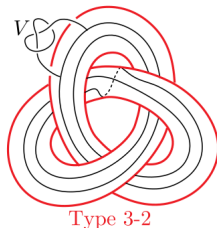
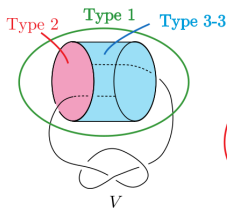
Por lo tanto, **no nos interesa** en esta plática los anillos esenciales *Type 4*.

Lema (Funayoshi-Koda-2019)

Sea V un cubo con asas de género 2 encajado en S^3 tal que $E(V)$ es ∂ -irreducible y atoroidal. Entonces $E(V)$ no contiene anillos Type 1, 3-1 y 4-2.

Nota

Por lo tanto solo nos interesan los anillos esenciales Tipo 2, 3-2 y 3-3.

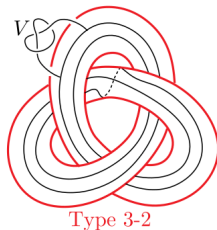
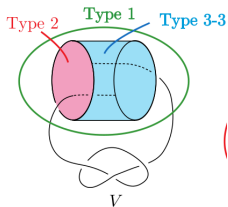


Nota

A es esencial *No separante* sii es Type 2 o Type 3-3

Nota

Por lo tanto solo nos interesan los anillos *Tipo 2, 3-2 y 3-3.*



La existencia de anillos esenciales $A \subset E(V)$ a veces **restringe** la existencia de anillos de otro Tipo disjuntos de A :

Lema (Funayoshi-2.4)

Si existe un anillo esencial A de *Tipo 2-2* en $E(V)$ entonces $E(V)$ *no contiene* un anillo esencial de *Tipo 3-2* disjunto de A .

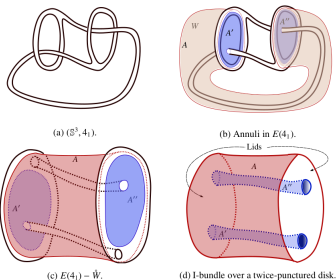
Descomposición JSJ

Al cortar por un conjunto maximal de **anillos esenciales** los pedazos

Teorema (JSJ)

Si M_i no es **simple** entonces M_i es un **espacio fibrado de Seifert** o un **haz de intervalos**.

Ejemplo



W es un toro sólido fibrado.

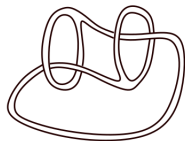
El exterior de $W \subset E(4_1)$ es un $[0,1]$ -haz con base un pantalón.

Ejemplo JSJ

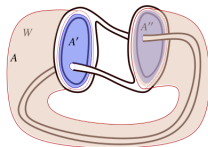
Lema



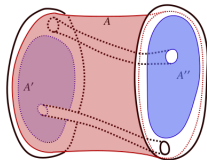
El diagrama de anillo de $(S^3, 4_1)$ es la gráfica:



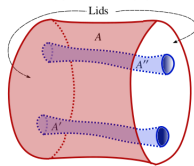
(a) $(S^3, 4_1)$.



(b) Annuli in $E(4_1)$.



(c) $E(4_1) - \bar{W}$.



(d) I-bundle over a twice-punctured disk.

W es un toro sólido fibrado.

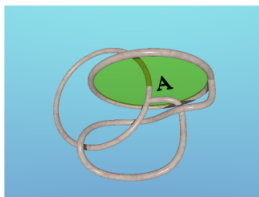
El exterior de $W \subset E(4_1)$ es un $[0,1]$ -haz con base un pantalón.


Diagrama de anillo

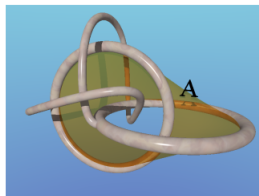
Definición

Sea (S^3, H) un cubo con asas de género 2 con al menos un anillo esencial en $E(H)$. Se define la **Gráfica-JSJ** Λ_H de (S^3, H) como la gráfica-JSJ $\Lambda_{E(H)}$ donde cada arista le corresponde un Anillo y cada vértice un pedazo.

Ejemplo



(a) Λ_{HK} of $(S^3, 5_1)$: 




(b) Λ_{HK} of $(S^3, 6_4)$: 

FIGURE 1.1. Annulus diagrams.

14 Gráficas JSJ

Teorema (Wang-2023)

Sea (S^3, H) un cubo con asas de género 2. Entonces su **diagrama característico** es alguno de la tabla:

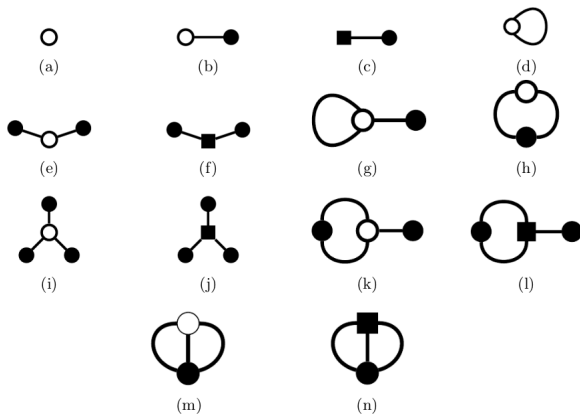
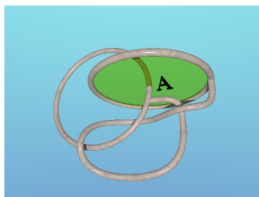



Diagrama de anillo mejorado

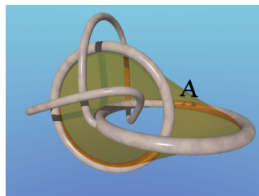
Definición

Sea (S^3, H) un cubo con asas de género 2 con al menos un anillo esencial en $E(H)$. Se define la **Gráfica-JSJ relativa** Λ_H de (S^3, H) como la gráfica-JSJ $\Lambda_{E(H)}$ con cada arista con un símbolo que le corresponde a su tipo de Anillo.

Ejemplo



(a) Λ_{HK} of $(S^3, 5_1)$: 




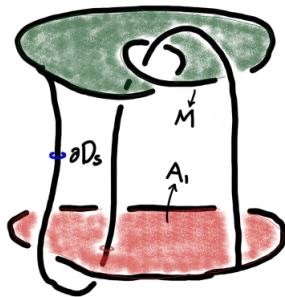
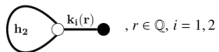
(b) Λ_{HK} of $(S^3, 6_4)$: 

FIGURE 1.1. Annulus diagrams.

Ejemplo



(d) Annuli in $E(6_1)$.



30 Gráficas relativas JSJ

Teorema (Koda-Ozawa-Wang-2024)

Sea (S^3, H) un cubo con asas de género 2. Entonces su *diagrama de anillo mejorado* es alguno de la tabla:

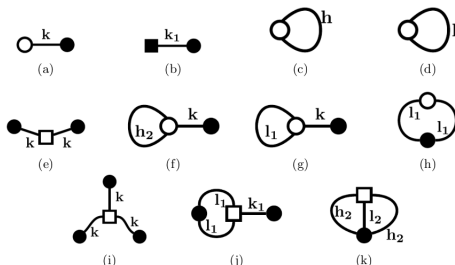


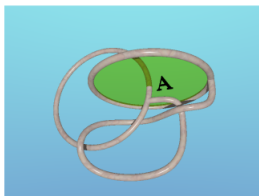
FIGURE 2. Table of relative JSJ-graphs: the label h stands for either h_1 or h_2 ; that is, two possibilities may occur. The same applies to the labels k and l ; the hollow square \square , likewise, means the node is either \circ or \blacksquare . For instance, Fig. 2i alone accounts for eight different types.

Los cuadros rellenos son $[0, 1]$ -haces, bolitas rellenas espacios de seifert y los círculos son simples.

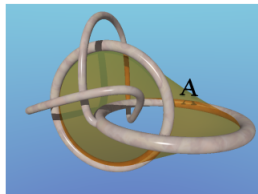
Aplicación: $(S^3, 5_1) \neq (S^3, 6_4)$

El diagrama de anillo no es un invariante completo y especialmente cuando el exterior tienen un único anillo esencial:

Ejemplo



(a) Λ_{HK} of $(S^3, 5_1)$:



(b) Λ_{HK} of $(S^3, 6_4)$:

FIGURE 1.1. Annulus diagrams.

Tienen exteriores homeomorfos pero **diferentes** diagramas de anillo mejorado.

Nota

El exterior $E(H)$ no es un invariante: Problema de Gordon-Luecke.

30 Gráficas relativas JSJ

Teorema (Koda-Ozawa-Wang-2024)

Sea (S^3, H) un cubo con asas de género 2. Entonces su **diagrama de anillo mejorado** es alguno de la tabla:

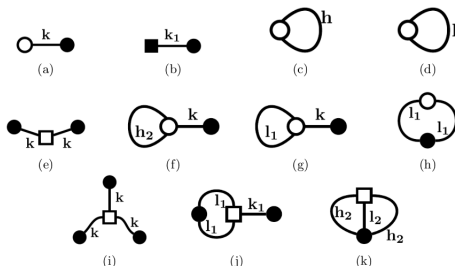


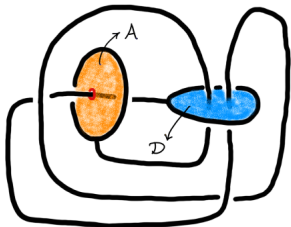
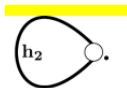
FIGURE 2. Table of relative JSJ-graphs: the label h stands for either h_1 or h_2 ; that is, two possibilities may occur. The same applies to the labels k and l ; the hollow square \square , likewise, means the node is either \circ or \blacksquare . For instance, Fig. 2i alone accounts for eight different types.

Los anillos K son **separantes** y los otros: h y l **no separantes**.
Problemas Abiertos: (i), (j) no se conocen realizaciones.

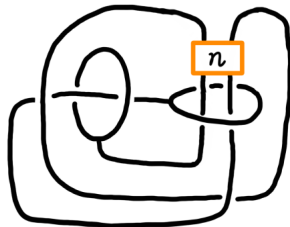
El diagrama de anillo mejorado y los exteriores $E(H)$ **no son un invariante completo**, especialmente cuando el exterior tienen un único anillo esencial:

Teorema

Existen **infinitos** cubos con asas **no-equivalentes** tales que sus exteriores son homeomorfos y sus diagramas de anillo mejorados son:



(a) (\mathbb{S}^3, HK) , A and \mathcal{D} .



(b) (\mathbb{S}^3, E_n) .

Problema de Gordon-Luecke

Teorema (G-L)

Dos nudos son equivalentes \Leftrightarrow sus exteriores son homeomorfos.

Pregunta

Cuando el exterior $E(V)$ determine el cubo con asas (S^3, V) .

Corollary (Wang-2023)

*Si el exterior de (S^3, V) contiene 3 anillos no isotópicos no separantes entonces el exterior **determina** el cubo con asas de género 2 anudado (S^3, V) .*

Proof.

Problema de Gordon-Luecke

Teorema (G-L)

Dos *nudos* son equivalentes \Leftrightarrow sus exteriores son homeomorfos.

Pregunta

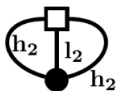
Cuando el exterior $E(V)$ determine el cubo con asas (S^3, V) .

Corollary (Wang-2023)

Si el exterior de (S^3, V) contiene 3 anillos no isotópicos no separantes entonces el exterior *determina* el cubo con asas de género 2 anudado (S^3, V) .

Proof.

Del teo de clasificación de gráficas-JSJ solo hay una:



(k)

Como el cuadro puede estar relleno o no implica 2 casos: $(S^3, 4_1)$ y $(S^3, 6_{10})$.

Bibliografía

- ▶ JSJ Decomposition for handle body-knots, Wang, 2023.
- ▶ Essential annuli in genus two handlebody exterior, Koda-Ozawa-Wang, 2024.
- ▶ Annulus Configurations in handlebody knot exteriors, Wang, 2023.
- ▶ Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exterior, Koda-Ozawa-2015.
- ▶ Extending automorphisms of the genus two surface over the 3-sphere, Funayoshi-Koda-2020
- ▶ A table of genus two handlebody-knots up to six crossings, A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi, 2012.