Nudos en 3-Variedades de Contacto

Sebastian Zapata Rendón
CIMAT

Escuela Fico Gonzáles Acuña de Nudos y 3-Variedades

Dic 4-Dic 6 2024

Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

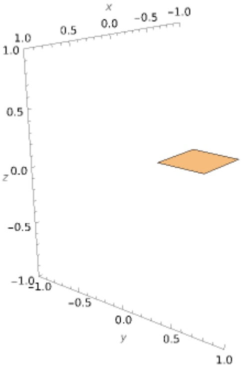
Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$

Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

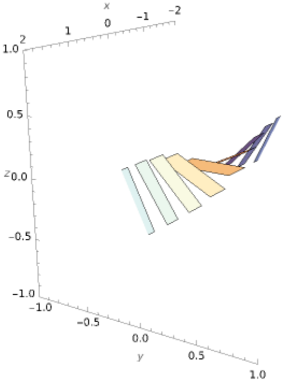
$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$



Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

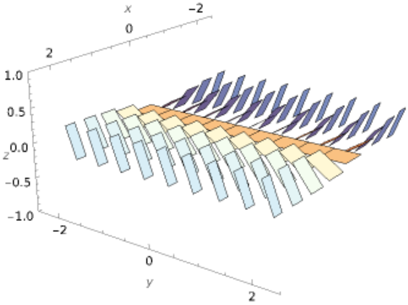
$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$



Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

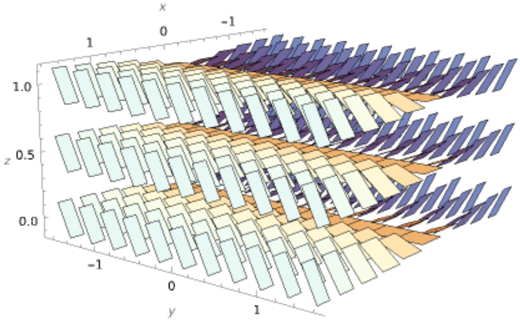
$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$



Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

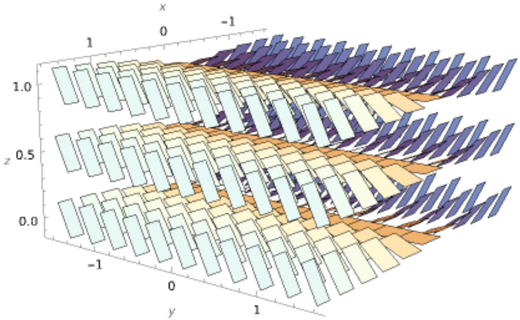
$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$



Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

Consideremos el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$$



Esta distribución de planos en $\mathbb{R}^3$ es lo que llamamos la estructura de contacto estándar de $\mathbb{R}^3$.

Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

La denotaremos por ξ_{std}

$$\xi_{std}(x_0, y_0, z_0) = gen\{\partial_x, \partial_y - x_0\partial_z\} = ker(dz + x_0 dy)$$

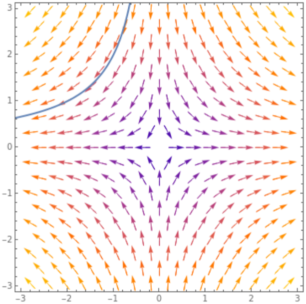
¿En qué sentido es de **contacto**?

Estructura de Contacto Estándar de $\mathbb{R}^3$

La denotaremos por ξ_{std}

$$\xi_{std}(x_0, y_0, z_0) = gen\{\partial_x, \partial_y - x_0\partial_z\} = ker(dz + x_0 dy)$$

¿En qué sentido es de **contacto**?

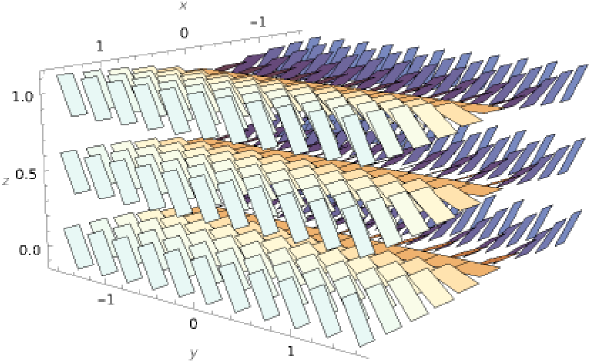


Esta es una curva integral para la distribución.

Estructuras de contacto en $\mathbb{R}^3$

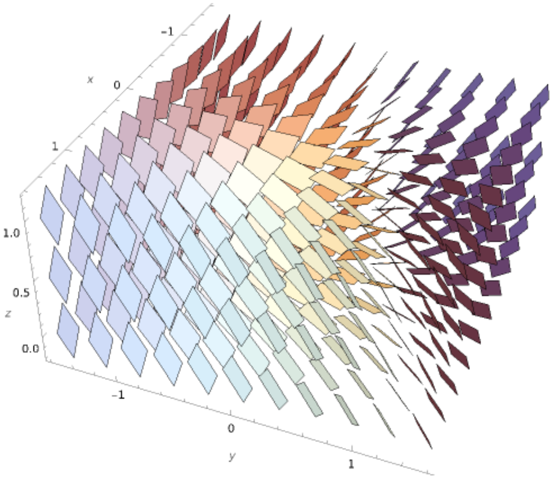
Diremos que una distribución de planos no degenerados ξ (**en** $\mathbb{R}^3$) es de contacto, si no existe (ni siquiera localmente), una superficie cuyo plano tangente en cada uno de sus puntos coincida con la distribución.

Estructuras de contacto en $\mathbb{R}^3$



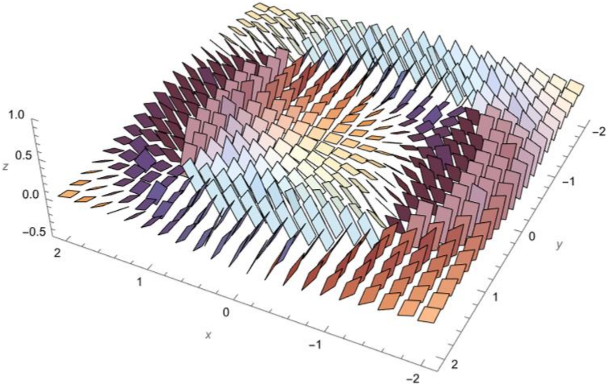
$$\xi_{std} = ker(dz + xdy)$$

Estructuras de contacto en $\mathbb{R}^3$



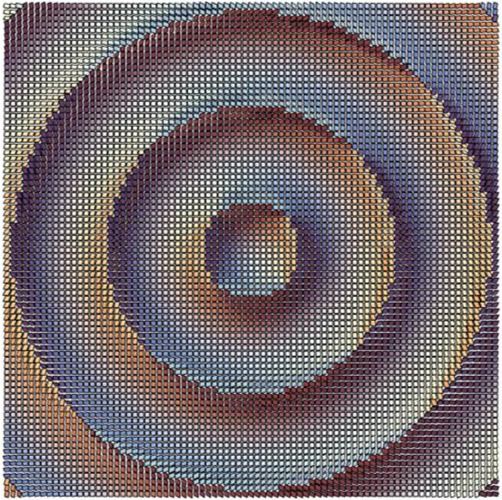
$$\xi_{rot} = ker(dz + xdy - ydx)$$

Estructuras de contacto en $\mathbb{R}^3$



$$\xi_{ot} = ker(cosrdz + rsinrd\phi)$$

Estructuras de contacto en $\mathbb{R}^3$



$$\xi_{ot} = ker(cosrdz + rsinrd\phi)$$

Estructuras de contacto

¿Qué tan comunes son?

Estructuras de contacto

¿Qué tan comunes son?

Teorema (Martinet)

Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una estructura de contacto.

Estructuras de contacto

¿Qué tan comunes son?

Teorema (Martinet)

Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una estructura de contacto.

Definición

Decimos que una aplicación suave $\phi : (M_1, \xi_1) \to (M_2, \xi_2)$ entre dos 3-variedades de contacto, es un contactomorfismo, si $\phi : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo que envía ξ_1 en ξ_2.

E.g., en $\mathbb{S}^3$ hay $\mathbb{Z} + 1$ no contactomorficas.

Estructuras de contacto

Teorema (Darboux)

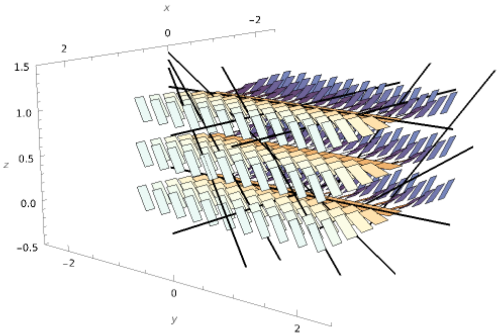
Toda 3-Variedad de contacto es localmente contactomorfica a $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Curvas Legendrianas y Transversales

Dada una curva $\gamma : I = [0,1] \to \mathbb{R}^3$, si para todo $t \in I$ $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{std}(\gamma(t))$, decimos que γ es **Legendriana**. Por otro lado si para todo $t \in I$ $\dot{\gamma}(t) \notin \xi_{std}(\gamma(t))$ decimos que es **Transversal**.

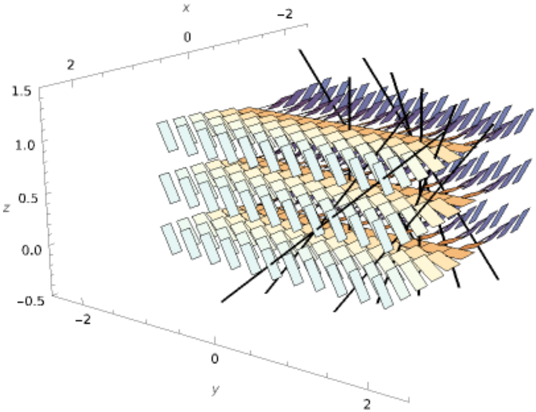
Curvas Legendrianas y Transversales

Dada una curva $\gamma : I = [0,1] \to \mathbb{R}^3$, si para todo $t \in I$ $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{std}(\gamma(t))$, decimos que γ es **Legendriana**. Por otro lado si para todo $t \in I$ $\dot{\gamma}(t) \notin \xi_{std}(\gamma(t))$ decimos que es **Transversal**.



Curvas Legendrianas en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Curvas Legendrianas y Transversales



Curvas transversales en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

- ¿Cómo podemos encontrar estas curvas?
- ¿Qué tan **interesante** puede ser γ?

Curvas Legendrianas y Transversales

¿Cómo podemos encontrar estas curvas?

Curvas Legendrianas y Transversales

¿Cómo podemos encontrar estas curvas?
Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ Legendriana. Como ξ_{std} es generada por $\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$. Notar que en cada punto:

$$\dot{\gamma}(t) = a\partial_x + b\partial_y - b\gamma_1(t)\partial_z$$

donde $a, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = a \\ \dot{\gamma}_2(t) = b \\ \dot{\gamma}_3(t) = -b\gamma_1(t) \end{cases}$$

Curvas Legendrianas y Transversales

¿Cómo podemos encontrar estas curvas?
Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ Legendriana. Como ξ_{std} es generada por $\{\partial_x, \partial_y - x\partial_z\}$. Notar que en cada punto:

$$\dot{\gamma}(t) = a\partial_x + b\partial_y - b\gamma_1(t)\partial_z$$

donde $a, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = a \\ \dot{\gamma}_2(t) = b \\ \dot{\gamma}_3(t) = -b\gamma_1(t) \end{cases}$$

Si asumimos que a, b son constantes:

$$\gamma(t) = \left(at + c_1, bt + c_2, -\frac{ab}{2}t^2 - bc_1 t + c_3 \right)$$

Curvas Legendrianas y Transversales

$a, b \in \mathbb{R}$

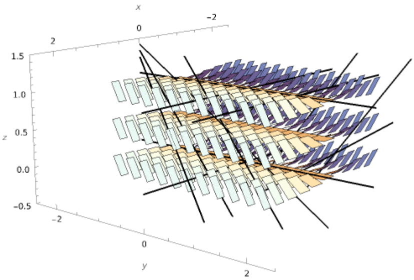
$$\gamma(t) = \left(at + c_1, bt + c_2, -\frac{ab}{2}t^2 - bc_1 t + c_3 \right)$$

De hecho, si $a = 0, b \neq 0$ o $a \neq 0, b = 0$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \left(at + c_1, bt + c_2, -\frac{ab}{2}t^2 - bc_1 t + c_3 \right)$$

De hecho, si $a = 0, b \neq 0$ o $a \neq 0, b = 0$



Obtenemos las rectas previas

Curvas Legendrianas y Transversales

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \left(at + c_1, bt + c_2, -\frac{ab}{2} t^2 - bc_1 t + c_3 \right)$$

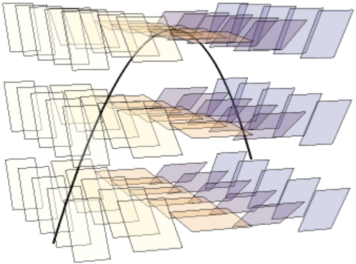
Si $a = b = 1$

Curvas Legendrianas y Transversales

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \left(at + c_1, bt + c_2, -\frac{ab}{2}t^2 - bc_1 t + c_3\right)$$

Si $a = b = 1$



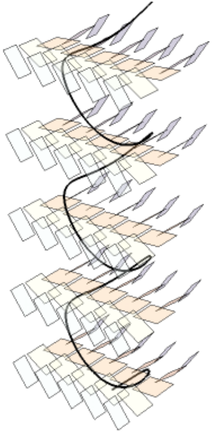
Curvas Legendrianas y Transversales

Si suponemos ahora $a \circ \gamma(t) = -sint, b \circ \gamma(t) = cost$. Obtenemos

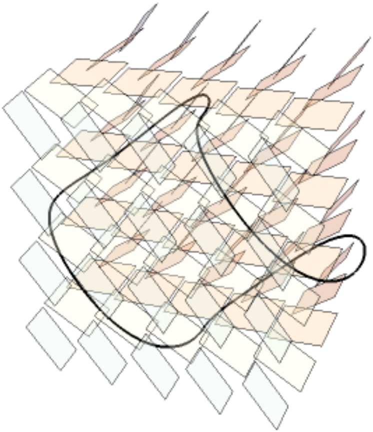
$$\gamma(t) = \left(cost, sint, -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sin(2t)\right)$$

Si suponemos ahora $a \circ \gamma(t) = -sint, b \circ \gamma(t) = cost$. Obtenemos

$$\gamma(t) = \left(cost, sint, -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sin(2t) \right)$$



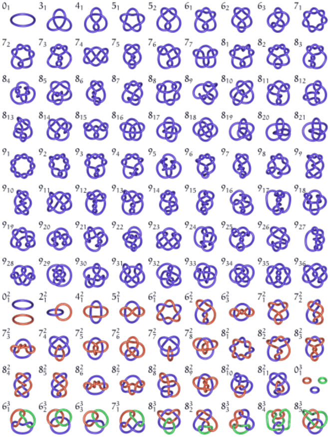
Con la curva γ anterior podemos construir una curva cerrada Legendriana:



¿Qué tan **interesante** puede ser γ?

Curvas Legendrianas y Transversales

¿Qué tan **interesante** puede ser γ?



Curvas Legendrianas y Transversales

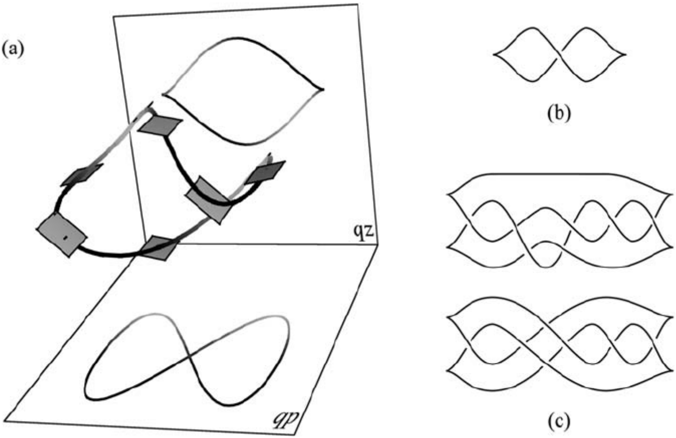
Dada una curva parametrizada $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, su **proyección frontal** es:

$$\gamma_F(t) = (\gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

y su **proyección Lagrangiana**:

$$\gamma_L(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Curvas Legendrianas y Transversales



Sabloff J., 2005

Curvas Legendrianas y Transversales

Teorema

Sea $\gamma : I \to (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ Legendriana, y $\gamma_F(t) = (\gamma_2(t), \gamma_3(t))$ su proyección frontal. Entonces γ se puede recuperar de γ_F por medio de:

$$\gamma_1(t) = -\frac{\dot{\gamma}_3(t)}{\dot{\gamma}_2(t)}$$

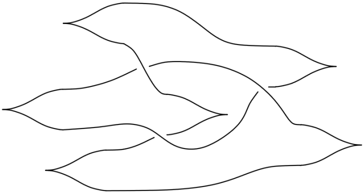
Teorema

Sea $\gamma : I \to (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ Legendriana, y $\gamma_L(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ su proyección Lagrangiana. Entonces γ se puede recuperar de γ_L por medio de:

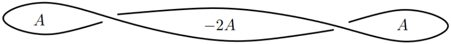
$$\gamma_3(t_1) = \gamma_3(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t)dt$$

Curvas Legendrianas y Transversales

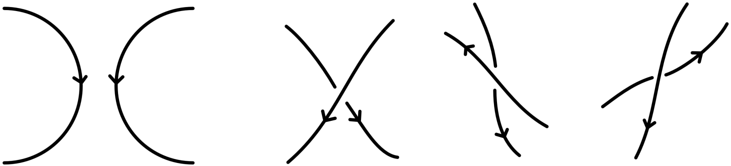
$$\gamma_1(t) = -\frac{\dot{\gamma}_3(t)}{\dot{\gamma}_2(t)}$$



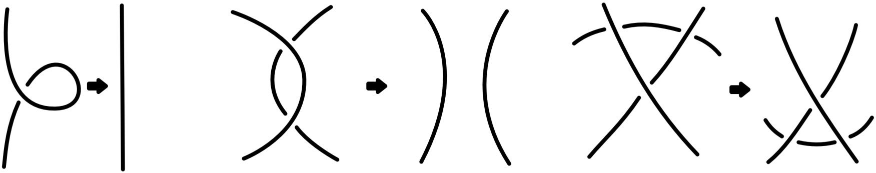
$$\gamma_3(t_1) = \gamma_3(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t)dt$$



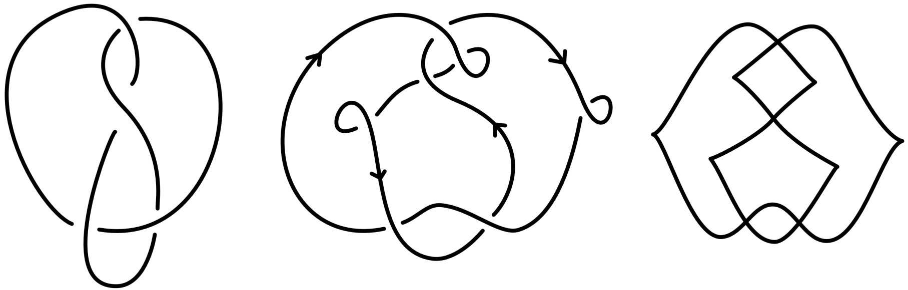
Para el caso transversal (positivo) es similar. E.g. podemos levantar una proyección frontal de un nudo si no aparecen secciones como:

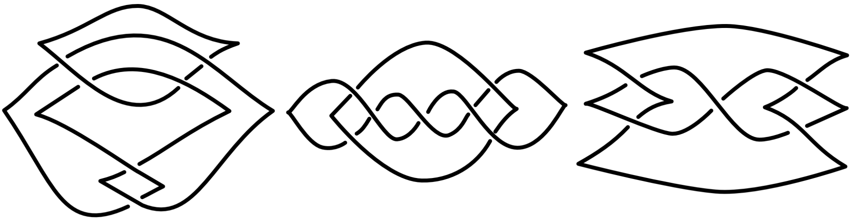


No todas las movidas de Reidemeister son válidas.

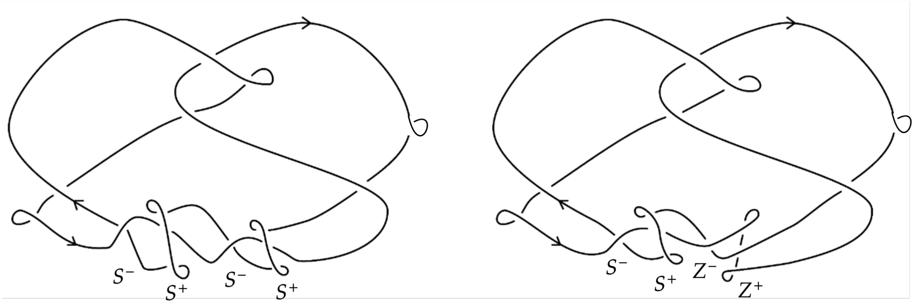


Curvas Legendrianas y Transversales





Curvas Legendrianas y Transversales



Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Claramente el tipo topológico $k(K)$ de un nudo Legendriano (transversal) K es un invariante, pero es incapaz de distinguir las diferencias de esta categoría.

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Claramente el tipo topológico $k(K)$ de un nudo Legendriano (transversal) K es un invariante, pero es incapaz de distinguir las diferencias de esta categoría.

De hecho, para cualquier clase topológica fija, hay infinitos nudos Legendrianos y transversales no equivalentes.

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Para nudos transversales, tenemos el número de autointersección $sl(K)$.

$$sl(K) := lk(K, K')$$

donde K' se obtiene de K al empujarlo por medio de un campo vectorial no nulo $v \in \xi|_\Sigma$, donde Σ es una superficie de Seifert.

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

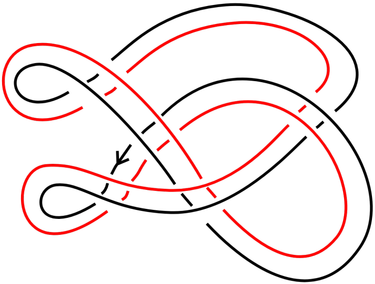
Para nudos transversales, tenemos el número de autointersección $sl(K)$.

$$sl(K) := lk(K, K')$$

donde K' se obtiene de K al empujarlo por medio de un campo vectorial no nulo $v \in \xi|_\Sigma$, donde Σ es una superficie de Seifert.

En $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, $\xi_{std}(x_0, y_0, z_0) = gen\{\partial_x, \partial_y - x_0\partial_z\}$, con lo cual podemos tomar $v = \partial_x$

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$



$$sl(K) = lk(K, {\color{red}K}) = \frac{N_+ - N_-}{2} = \frac{2n_+ - 2n_-}{2} = Writhe(K)$$

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Para Legendrianos tenemos 2 invariantes clásicos:
$tb(K)$ **(Thurston-Bennequin)**

$$tb(K) := lk(K, K')$$

donde K' se obtiene de K al empujarlo por medio de un campo vectorial no nulo $v \notin \xi|_K$.

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

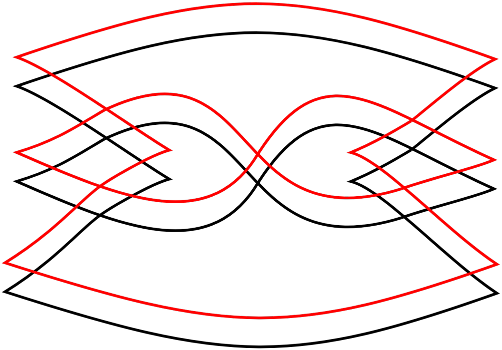
Para Legendrianos tenemos 2 invariantes clásicos:
$tb(K)$ **(Thurston-Bennequin)**

$$tb(K) := lk(K, K')$$

donde K' se obtiene de K al empujarlo por medio de un campo vectorial no nulo $v \notin \xi|_K$.

En $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, podemos tomar $v = \partial_z$.

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

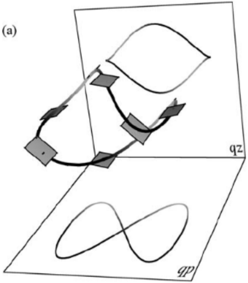


$$tb(K) = lk(K, K) = writhe(K) - \frac{1}{2}\#(\text{Cúspides})$$

Invariantes clásicos en $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

$rot(K)$ **(Rotacional)**

$$rot(K) := \text{“Número de vueltas de } K\text{”}$$



$$rot(K) = \frac{1}{2}(C\downarrow - C\uparrow)$$

¡Gracias!